Trigonométrie

Roland Christophe

4 avril 2014

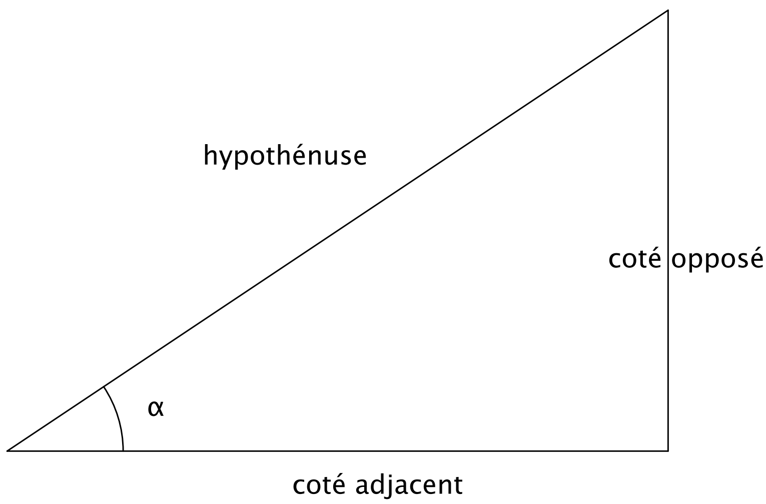
Table des matières

1 Introduction

La trigonométrie vient du grec «trigonos» : «triangulaire» et du grec «métron» : «mesure», la trigonométrie se base sur des relations entre les angles et les mesures des cotés dans les triangles. C'est une science mathématique très ancienne qui date de l'antiquité.

1.1 Le sinus d'un angle

On considère un triangle rectangle et l'un de ses angles aigus que l'on va appeler α :



On voit sur le dessin que :

1. l'*hypoténuse* est le coté opposé à l'angle droit qui est aussi le plus grand coté du triangle rectangle,
2. le *coté opposé* est le coté opposé à l'angle α,
3. le *coté adjacent* est l'un des coté formant l'angle α et qui n'est pas l'hypoténuse.

Si on prend plusieurs triangles rectangles différents mais qui ont tous un angle identique (hors l'angle droit) on peut remarquer quelque chose d'intéressant. Lorsque l'on divise le côté opposé par l'hypoténuse, on obtient toujours la même valeur. Cette propriété découle du fait que tout les triangles rectangle ayant un angle identique sont des triangles semblables.

Imaginons que nous ayons un angle α dans un triangle rectangle disons par exemple de 30 degrés. On divise le côté opposé par l'hypoténuse et on trouve comme valeur 0,5. On est alors assuré, à cause de la remarque précédente, que si on a n'importe quel triangle rectangle avec un angle de 30 degrés, alors la division du côté opposé par l'hypoténuse donne 0,5.

On peut donc dire que puisque le résultat de cette division ne dépend que de l'angle et non du triangle, on peut associer à chaque valeur valeur possible d'un angle le nombre qui est le résultat de cette division. Par exemple, on a dit que pour un angle de 30 degrés ce nombre vaut 0,5. On va noter ce fait de manière mathématique comme ceci :

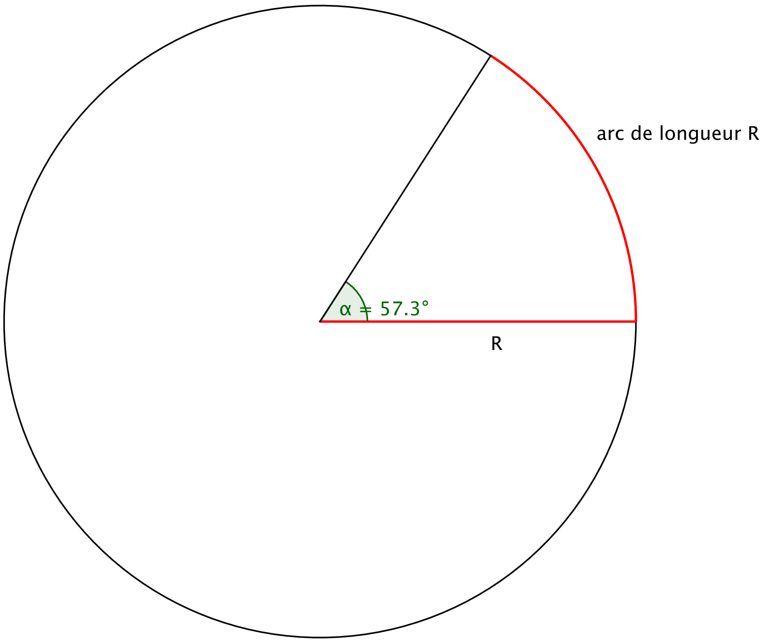
$$\sin(60^\circ) = 0,5$$

Et on dit que le *sinus* de 30 degrés est 0,5.

1.2 Introduction au concept de radian

Pour mesurer des angles, vous avez sans doute l'habitude de travailler avec des degrés comme unité. En trigonométrie, nous n'allons pas utiliser cette unité, nous allons utiliser les radians.

Considérons la figure ci-dessous. On a un cercle de rayon R. Si on considère un arc de cercle de longueur R, on peut construire un angle qui vaut (par définition) un radian.



La circonférence d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$. Un angle d'un radian intercepte donc un arc de cercle d'une longueur de $1/(2\pi)$ fois la circonférence, qui correspond à un angle de 360 degrés, donc un radian vaut :

$$1^c = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Le symbole «c» en exposant est l'analogue du symbole «degré» pour les radians.

Le radian est très utilisé en trigonométrie.

2 Fonctions trigonométriques

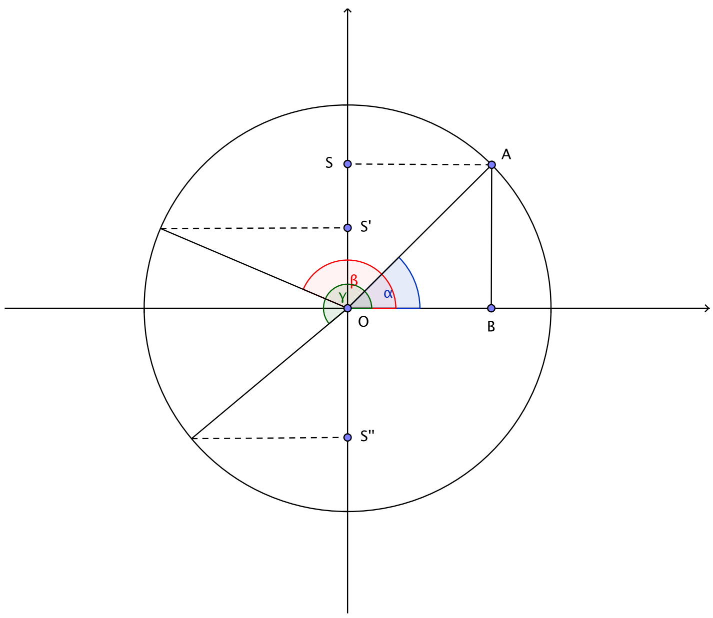
2.1 Fonction sinus

À partir de ce que nous avons vu nous allons définir une fonction : la fonction sinus.

Cette fonction se définit à partir de ce que nous avons dit dans l'introduction. Cependant, on faisait le lien entre un angle et un nombre, et on veut une fonction qui donne un nombre en fonction d'un autre nombre. On doit donc fixer une unité pour les angles et nous utiliserons le radian.

On a quand même un problème. En faisant comme ça, on définit le sinus uniquement pour des angles strictement compris entre 0 et $\pi/2$ radians (c'est à dire entre 0 et 90 degrés). On voudrait étendre la définition pour qu'on puisse calculer le sinus de n'importe nombre.

Considérons la figure suivante :



Nous avons un cercle de rayon 1, dans lequel se trouve le triangle OAB dont l'un des angles est α. Le sinus de cet angle est comme nous l'avons vu, le côté opposé divisé par l'hypoténuse, c'est à dire :

$$\sin \alpha = \frac{|AB|}{|OA|} = |AB| = |OS|$$

Car $|OA| = 1$ (cercle de rayon 1), il en résulte que si on construit (de la bonne manière !) l'angle dans un cercle unité, il suffit de faire une projection sur l'axe y pour avoir la valeur du sinus de l'angle.

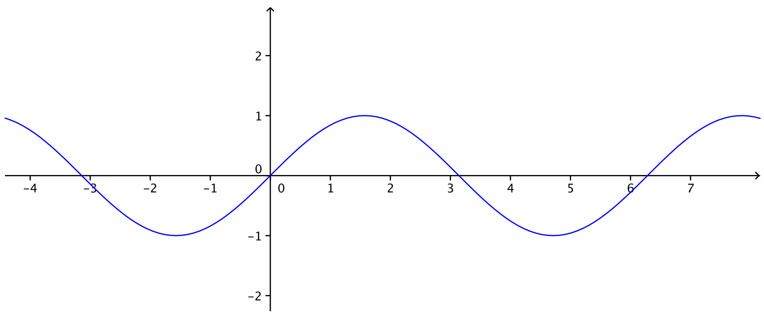
Considérons maintenant un angle $\beta > \pi/2$. On ne peut pas définir son sinus à partir d'un triangle rectangle, mais dans le triangle trigonométrique, on peut le définir en appliquant la même méthode que précédemment, on a donc :

$$\sin \beta = |OS'|$$

Par contre, dans le cas d'un angle $\gamma > \pi$, on a un sinus négatif (car on est dans les valeurs négatives de y) et donc :

$$\sin \gamma = -|OS''|$$

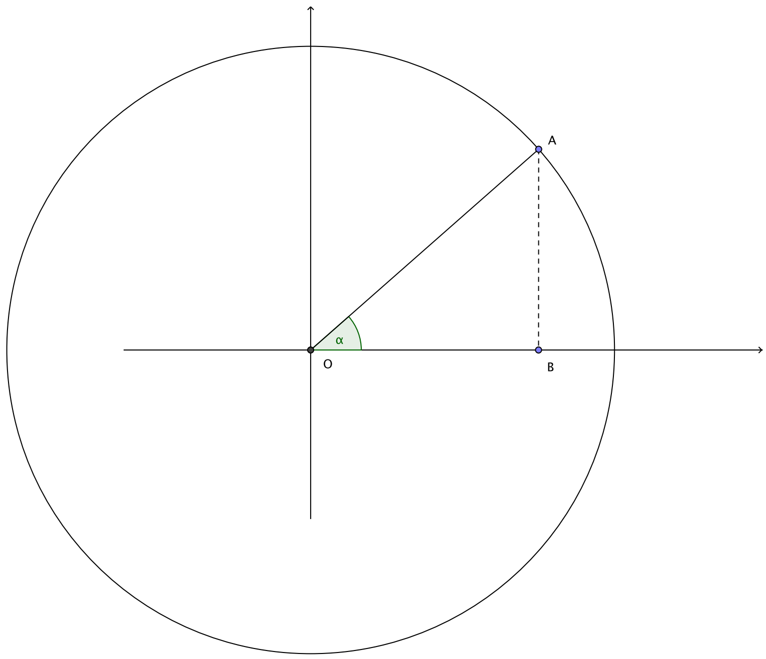
Que se passe-t'il pour des angles supérieurs à 2π (360°) ? ? Et bien c'est simple : on est près pour un deuxième tour de cercle ! Ainsi, au fur et à mesure que l'on augmente la valeur de l'angle, on va tourner dans le cercle de sorte que l'on retrouvera ainsi les mêmes valeurs pour la fonction sinus : on dit que la fonction est périodique. Cela est bien visible en regardant son graphe :



2.2 Fonction cosinus

Nous avions introduit la fonction sinus à l'aide des triangles rectangles, on divisait le côté opposé par l'hypothénuse. On peut aussi diviser le côté adjacent par l'hypothénuse : on calcule alors le *cosinus*.

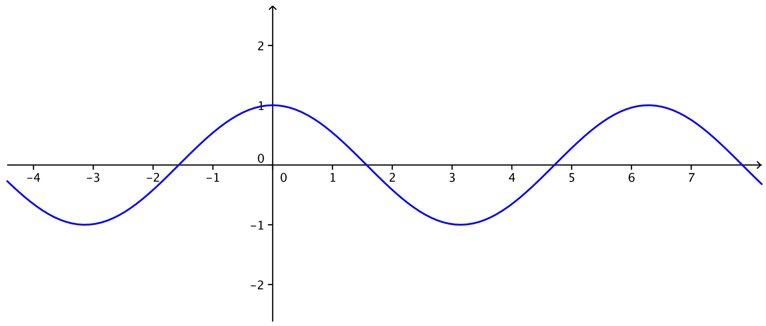
On peut très facilement se rendre compte qu'il suffit de projeter sur l'axe Ox dans le cercle trigonométrique :



On a :

$$\sin\alpha = |OB|$$

Les même remarques que pour la fonction sinus s'appliquent encore ici. Le graphe de la fonction cosinus est semblable à celui de la fonction sinus, à une translation près :



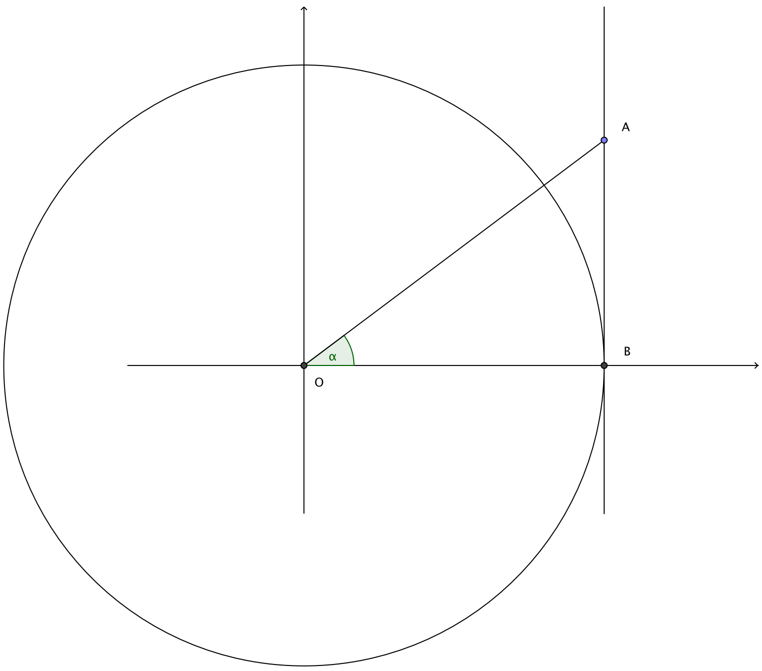
2.3 Fonction tangente

La *tangente* d'un angle dans un triangle rectangle est le rapport du côté opposé sur le côté adjacent.

Sur le schéma ci-dessous, on a :

$$\tan\alpha = \frac{|AB|}{|OB|} = |AB|$$

On projette donc sur une droite verticale tangente au cercle au point $B = (1, 0)$.



On peut prouver que :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

En effet :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{cote oppose}}{\text{hypothenuse}}}{\frac{\text{cote adjacent}}{\text{hypothenuse}}} = \frac{\text{cote oppose}}{\text{cote adjacent}} = \tan\alpha$$