Mécanique newtonienne

Roland Christophe

4 avril 2014

Table des matières

1 Qu'est ce que la mécanique newtonienne ? ?

1.1 Définition

La mécanique newtonienne (aussi appelée «mécanique classique») est, comme son nom l'indique bien, basée principalement sur les travaux de Newton. En particulier, le livre *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* écrit par Newton jette les bases de cette discipline. On peut diviser la mécanique newtonienne en plusieurs parties distinctes.

On peut faire le découpage suivant :

1. La *cinématique* étudie les mouvements sans s'occuper de leurs causes. On tentera donc de trouver les équations qui peuvent décrire l'évolution d'un mobile en fonction du temps, c'est à dire d'étudier précisément la notion de trajectoire ;
2. la *statique* étudie les systèmes mécaniques dans lequel les corps de ces systèmes sont au repos (leur vitesse est nulle) ;
3. la *dynamique* étudie les mouvements des corps en tenant compte cette fois des causes de ces mouvements, on tentera d'établir les équations des trajectoires en fonction des forces qui s'exercent sur ces corps.

2 Cinématique

2.1 Notion de référentiel

Il est évident que la notion d'*observateur* est très importante en physique. Pour faire de la physique, il faut évidemment faire des mesures, et pour qu'une mesure ait un sens, il faut soit que tout les observateurs s'accordent sur cette mesure (ou au moins une classe particulière d'observateurs «privilégiés»), ou du moins que l'on puisse toujours contextualiser la mesure.

Précisons cette idée. Deux personnes différentes observant un même phénomène naturel peuvent avoir des visions tout à fait différentes. Un exemple simple : on sait tous (ou presque) que la terre tourne autour du soleil. Mais si ceci est vrai en particuliers pour un observateur immobile par rapport au soleil, pour un observateur terrestre, le soleil tourne autour de la terre. Il faut donc préciser ce que cela veut dire : «la terre tourne autour du soleil», est-ce une simple question de perspective ou y a t-il quelque de plus profond derrière ? On reviendra sur ce genre de questionnement en abordant la relativité de Galilée.

Il existe une notion plus précise et plus commode que la notion un peu vague d'«observateur» : c'est la notion de *référentiel*. On peut définir un référentiel en faisant appel explicitement à un système de coordonnée précis, mais ce n'est pas obligatoire. Ici, on va faire une distinction : ainsi on va dire par exemple que deux observateurs immobiles l'un par rapport à l'autre sont dans le même référentiel, mais bien sûr ils sont libre d'utiliser chacun le système de coordonnées de leur choix.

Un référentiel est donc un cadre particuliers dans lequel on va faire des mesures. Pour cela, on va attacher au référentiel un ou plusieurs systèmes de coordonnée dans le but de mesurer les positions, vitesses, ... des différents mobiles étudiés. On peut utiliser le type de système de coordonnée que l'on souhaite : cartésiens, sphériques, cylindrique, ... Un système de coordonnées spatiales n'est pas suffisant : il faut de plus pouvoir mesurer le temps, intuitivement on pourrait dire que l'on attache au référentiel une *horloge*. En mécanique newtonienne, toutes les horloges (supposées infiniment précises !) de tout les référentiels sont parfaitement synchronisées. Une conséquence particulière est que la simultanéité est absolu : deux événements simultanés dans un référentiel le sont dans tout les autres référentiels.

Cette façon de présenter les choses n'est cependant pas satisfaisante. En fait, si l'on veut être précis et pouvoir garder la même définition dans le cadre de la relativité restreinte, il nous faut une infinité d'horloge, une en chaque point de l'espace. Elles sont toutes immobiles et synchronisées les unes par rapport aux autres. Si donc un évènement survient en un certain point de l'espace, on note le temps correspondant en regardant le temps indiqué par l'horloge en ce point. Bien sûr c'est une vue de l'esprit, on ne pas réellement couvrir tout l'espace d'horloges.

On peut prendre les mêmes précautions pour les mesures spatiales. On va imaginer que l'on peut repérer les positions des horloges par des règles (et éventuellement pouvoir aussi mesurer des angles) de manière à étiqueter chaque horloges par ses coordonnées. Ce qui permet, pour n'importe quel évènement, de simplement lire sa position dans l'espace, en regardant l'étiquetage de l'horloge en ce point.

Pour connaître la trajectoire d'un corps, il faut déterminer quel est sa position au cours du temps. Pour repérer la position d'un point, il suffit de donner ses coordonnées par rapport au système de coordonnée du référentiel. Pour un objet étendu c'est plus compliqué : il est constitué de plusieurs points et il peut tourner sur lui-même pendant son déplacement ! Voila pourquoi on va commencer par étudier des objets (imaginaires) qui sont de simple points, c'est à dire des *objet ponctuel*.

2.2 Notion de trajectoire

Considérons un mobile en mouvement pendant un certain intervalle de temps (qui peut être infini). L'ensemble des positions successives du mobile est appelé le *support de la trajectoire*. Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de trajectoire : la donnée du support de la trajectoire ne dit pas ou se trouve le mobile à un certains temps donné contrairement la trajectoire.

Supposons que l'on ait un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On repère la position d'un point P :

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x, y, z sont les coordonnées du point P. Si ces coordonnées évoluent au cours du temps et que $X(t), Y(t), Z(t)$ sont les coordonnées du point en fonction du temps on peut écrire :

$$\vec{OP}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$$

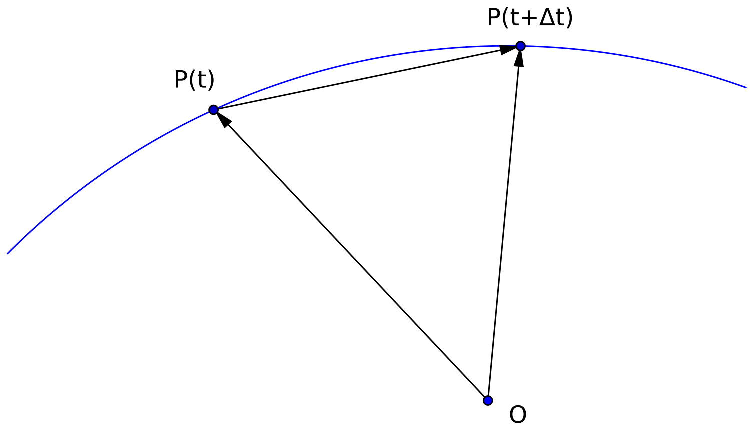
Ce qui définit une fonction $\vec{f}$ tel que $\vec{OP}(t) = \vec{f}(t)$ donc la position du mobile en fonction du temps : c'est la *trajectoire du mobile*.

2.3 Vitesse

Nous allons maintenant définir la vitesse d'un mobile : c'est tout simplement la distance parcourue par unité de temps donc :$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ où Δs représente la distance parcourue par le mobile sur le support de la trajectoire pendant le temps Δt. Il s'agit évidemment là de la vitesse *moyenne* calculé sur le temps Δt. Cependant, dans le cas de mobile ayant une vitesse variant à chaque instant, la notion de *vitesse instantanée* est très utile, pour définir la vitesse instantanée, on passe à la limite de Δt tendant vers zéro (on définit la fonction S comme donnant la position sur la courbe en fonction du temps : $s = S(t)$) :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS(t)}{dt}$$

On peut de plus définir le *vecteur vitesse* du mobile. En un point du support de la trajectoire, le vecteur vitesse a pour norme la vitesse (comme définit ci dessus) et est tangeant au support. De plus, le sens du vecteur est le sens de déplacement du mobile. Considérons le vecteur position $\vec{OP}$ du mobile, à l'instant t et $t + \Delta t$ (c'est à dire les vecteurs $\vec{OP}(t)$ et $\vec{OP}(t + \Delta t)$) :



Le point $P(t)$ est à la position $S(t)$ sur la courbe et le point $P(t+\Delta t)$ est à la position $S(t + \Delta t)$. Si on fait tendre Δt vers zéro, le vecteur $P(t)P(\vec{t} + \Delta t)$ devient tangeant à la courbe et sa norme tend à être égale à $S(t + \Delta t) - S(t) = dS(t)$. Si on divise ce vecteur par Δt, sa norme lorsque Δt tend vers zéro devient donc $\frac{dS(t)}{dt}$ c'est à dire la vitesse.

On a donc que le vecteur vitesse est :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OP}(t + \Delta t) - \vec{OP}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{OP}(t)}{dt}$$

2.4 Accélération

L'accélération est simplement l'accroissement de la vitesse par unité de temps : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Comme pour la vitesse on défini l'accélération instantanée :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\frac{dS(t)}{dt})}{dt} = \frac{d^2 S(t)}{dt^2}$$

On définit de même le vecteur accélération, et on dérive simplement le vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(\vec{t})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{dv(\vec{t})}{dt} = \frac{d(\frac{dO\vec{P}(t)}{dt})}{dt} = \frac{d^2 O\vec{P}(t)}{dt^2}$$

2.5 Mouvements simples

2.5.1 Mouvements rectilignes uniformes

Un mouvement rectiligne uniforme est un mouvement dans lequel la vitesse est constante, le mobile se dirigeant en ligne droite. On peut choisir un repère cartésien dans lequel le mouvement du mobile se fait le long de l'axe x par exemple : ainsi on ne se préoccupe que d'une seule coordonnée spatiale. Nous allons établir la trajectoire du mobile, c'est à dire connaître la fonction X tel que $x = X(t)$.

On connaît la fonction V donnant la vitesse en fonction du temps : $V(t) = v$ tout simplement (vitesse constante). On sait que $V(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}$ donc que $v = \frac{dx}{dt}$, c'est à dire que $dx = vdt$. On intègre cette relation :

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v d\tau = v \int_{t_0}^{t} d\tau = v(t - t_0)$$

Et donc :

$$x = v(t - t_0) + x_0$$

Dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, le graphique de la position en fonction du temps est donc une droite.

2.5.2 Mouvements rectilignes uniformément accélérés

Un mouvement rectiligne uniformément accéléré est un mouvement dans lequel la vitesse est constante, le mobile se dirigeant en ligne droite. On choisit encore une fois le repère de manière à n'avoir qu'une coordonnée spatiale et on cherche encore la trajectoire.

En notant a l'accélération, on a va vitesse en fonction du temps :

$$v = a(t - t_0) + v_0$$

Où v_0 est la vitesse «au départ», c'est à dire au temps t_0. De même, la position en fonction du temps est donnée par la formule :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

On connaît la fonction ϕ donnant l'accélération en fonction du temps : $\phi(t) = a$. Sachant que $\phi(t) = \frac{dv}{dt}$ donc que $a = \frac{dv}{dt}$ et $dv = adt$ ce qui donne :

$$v = \int_{t_0}^{t} ad\tau + v_0 = a(t - t_0) + v_0$$

Posons $t_0 = 0$ pour simplifier. On a : $v = at + v_0$. Ce qui donne $\frac{dx}{dt} = at + v_0$, c'est à dire $dx = [at + v_0]dt$ et on intègre :

$$x = \int_{0}^{t} [a\tau + v_0]d\tau + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Dans le cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré, le graphe de la position en fonction du temps est donc une parabole.

3 Relativité de Galilée

3.1 Idée générale

Imaginez. Vous vous retrouvez dans un bateau alors qu'il n'y a pas la moindre houle. Enfermé dans une cale, vous n'avez aucune fenêtre : vous ne pouvez rien savoir de ce qui se passe dehors. La mer étant parfaitement calme, vous ne ressentez aucun mouvement. La question est la suivante : est-il possible, par une quelconque expérience physique de calculer la vitesse du bateau par rapport au rivage ? La réponse à cette question mène au *principe de relativité.*

Dans votre bateau, vous pouvez faire toutes les expériences que vous voulez : observer la chute d'un objet, l'écoulement d'un fluide, des chocs entre des mobiles,... Rien ne pourra vous aider : *aucune expérience ne vous dira si votre bateau est immobile ou pas.* Quelque soit la vitesse du bateau par rapport au rivage, les expériences les plus précises du monde ne vont serons d'aucune utilité.

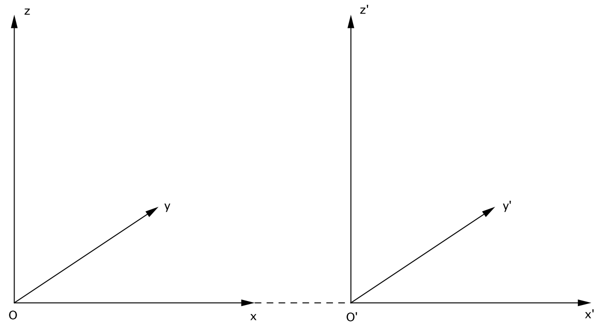
Il faut nuancer toutefois. Si le bateau accélère brutalement, vous le sentirez sans problème. De même, si il se trouve dans un virage, vous ressentirez les effets de la force centrifuge. Vous n'aurez toujours aucune idée de sa vitesse, mais vous pourrez mesurer son accélération relativement facilement. Pour ne pas devoir traiter ces cas, on va supposer que le bateau se déplace en ligne droite et que sa vitesse est constante. On dit dans ce cas que le référentiel du bateau est *galiléen* ou *inertiel.*

Le principe de relativité exclut l'existence d'un référentiel privilégié par rapport auquel on pourrait calculer sa vitesse (un référentiel au repos absolu). Dire que l'on se déplace à une certaine vitesse n'a de sens qu'en précisant par rapport à quel référentiel cette vitesse est mesurée. Certes, quand nous marchons, on peut dire qu'on se déplace à une certaine vitesse. Mais nous déplaçons nous par rapport à la terre ou la terre se déplace t elle par rapport à nous ? Galilée affirme qu'il n'y a *aucune* raison de choisir l'une ou l'autre de ces affirmations.

Cela se traduit par les équations qui permettent de passer d'un référentiel à l'autre. Elles montrent que les lois de la physique sont les mêmes pour tout les référentiels galiléens. Dans ce cas, le principe vu plus haut se justifie.

3.2 Transformations de Galilée

Prenons donc 2 référentiels, R et R' en mouvement par rapport à l'autre à la vitesse v (vitesse constante).



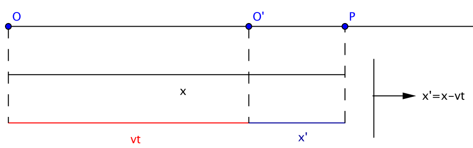
Le référentiel R a pour origine O et les axes x, y et z, et le référentiel R' a l'origine O' et les axes x', y' et z' (voir figure). On voit que les axes x et x' sont alignés pour la simplicité des équations. Imaginons que O' s'éloigne de O à la vitesse v.Un point P à les coordonnées x, y et z dans R. Quelles seront ses coordonnées dans R' ?

Calculons d'abord la coordonnée x' :

Nous savons que vt est la distance entre O et O'.

c'est donc que (voir schéma ci-dessous qui ne montre que l'axe x x') :

$$x' = x - vt$$



Déplacer le référentiel suivant l'axe x n'as évidemment pas changer les coordonnées y et z :

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Enfin, Galilée ajoute :

$$t' = t$$

pour montrer que les coordonnées de temps sont les mêmes dans les 2 référentiels (ex : si un phénomène prend 2 minutes dans un référentiel, il prendra 2 minutes dans l'autre : le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels). Nous avons donc :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Ces relations s'inversent facilement :

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

3.3 Loi d'addition des vitesses

Voici une conséquence importante :

Un mobile se déplace à la vitesse v' dans le référentiel R'. Quelle est sa vitesse dans un autre référentiel, R se déplaçant à la vitesse V par rapport à R' ?

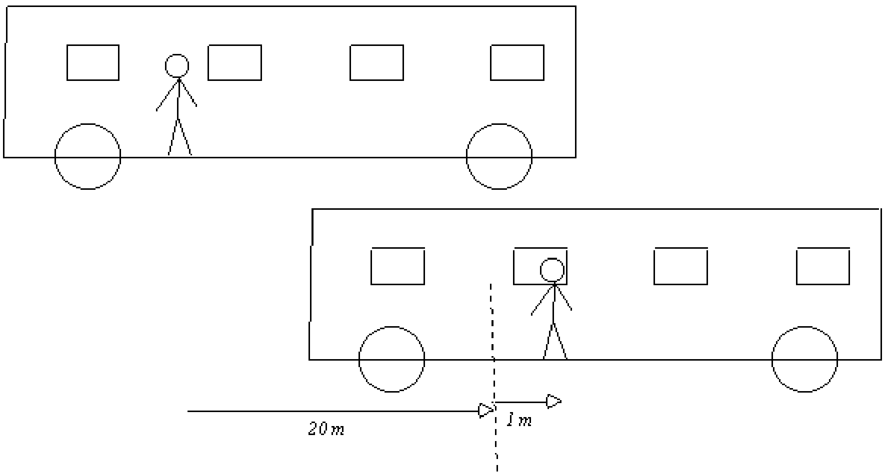
On calcule sa vitesse dans le référentiel R en calculant simplement la dérivée par rapport au temps :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + Vt')}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + \frac{d(Vt')}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V\frac{dt'}{dt'} = v' + V$$

Car on a évidemment $v' = \frac{dx'}{dt'}$.

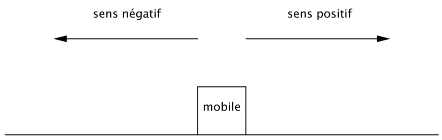
Exemple :

Imaginons un train roulant à la vitesse de 20 m/s, et un voyageur se déplaçant dans le couloir du train à 1 m/s, dans le sens de la marche du train. Sa vitesse par rapport à la terre est donc de 20+1=21 m/s.



Sur ce schéma, tout se passe en une seconde. Les lignes en pointillé marquent la position du voyageur si il était resté immobile dans le train. Il s'est déplacé de 1 m dans le train, qui s'est lui même déplacé de 20 m. Le déplacement totale du voyageur est donc de 21 m, en 1s.

C'est la loi d'addition des vitesses. A l'inverse si le voyageur marchait dans le sens contraire du train, sa vitesse par rapport à la terre serait 20-1=19 m/s donc dans ce cas on doit soustraire les vitesses. Mais en réalité, on peut dire aussi qu'on les additionnes si on pose que la vitesse du voyageur est négative. Plus précisément on impose un sens positif et un sens négatif pour les vitesses ce qui permet de garder une seule formule pour l'addition des vitesses.



Si le mobile va de gauche à droite, sa vitesse est positive, dans le cas contraire sa vitesse sera négative ce qui permet de garder une seule forme pour la loi d'addition des vitesses : additionner une vitesse négative au lieu de faire une soustraction.

4 Dynamique : notions de bases

4.1 Introduction

Jusqu' ici, nous avons fait de la cinématique, étudier le mouvement des corps sans s'occuper du pourquoi de leur mouvement, de la cause du mouvement. C'est ce que nous allons faire maintenant : la dynamique. Dans cette branche de la physique, on parle beaucoup des concepts de force et de masse, deux notion très importante qu' il faut préciser. Tout d'abord, qu'est ce que la masse ? Question très difficile en réalité car demandant une définition précise. Ce qui n'est pas simple avec la masse.

Il existe en réalité deux «masses différentes» : la masse grave et la masse inerte. La masse grave est celle qui intervient dans la force de gravitation, tandit que la masse inerte intervient dans la deuxième loi de Newton (voir plus loin). Le problème est de savoir pourquoi ces deux masses sont égales.

Disons simplement pour l'instant que pour un corps donné on peux lui associé un nombre m que l'on appelle la «masse» du corps. Nous avons comme propriété que la masse d'un corps est indépendante de sa vitesse et de sa position.

Le concept de «masse» amène tout naturellement le concept de quantité de mouvement.

4.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une notion très importante en mécanique. On peut simplement poser la définition, mais il peut être intéressant d'approcher cette notion de façon intuitive, et de justifier du même coup son appellation. On va dire tout d'abord que la quantité de mouvement (que l'on note par la lettre p) est proportionnelle à la vitesse v ce qui se note symboliquement :

$$p \propto v$$

Ce qui intuitif étant donné son appellation. Maintenant, supposons deux corps avec deux quantités de mouvement différentes. On peut dire (encore intuitivement) qu'il est plus «facile» de stopper le corps qui a le moins de quantité de mouvement. Effectivement, il est plus facile d'arrêter un objet lent qu'un objet rapide, mais on se rend compte aussi facilement que la masse joue un rôle important : pour deux mobiles à vitesses égales, il est plus facile de stopper le plus léger. On suppose donc que l'on peut écrire :

$$p = m \cdot v$$

Ou encore en considérant la quantité de mouvement comme un vecteur :

Définition 1. La quantité de mouvement *d'un corps est sa masse multiplié par sa vitesse :*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

On reviendra sur notre approche intuitive de la quantité de mouvement plus loin. Mais il n'est pas difficile de sentir déjà que la notion (intuitive) de force, est directement liée à la variation de la quantité de mouvement.

5 Première loi de Newton : principe d'inertie

5.1 Idée générale

La première loi de Newton s'énonce relativement facilement et est assez intuitive. On considère un corps sur lequel aucune force ne s'exerce. Quelles sont ses mouvements possibles dans un référentiel donné ?

La réponse que donnait Aristote était la suivante : en l'absence de force, aucun mouvement n'est possible. Il s'appuyait entre autre sur cette expérience : un objet que l'on lance horizontalement tombe et devient immobile assez rapidement. Plus aucune force n'agit sur lui et il s'immobilise. Pour Aristote donc, tout objet en mouvement subit une ou plusieurs forces.

Ce point de vue fut critiqué particulièrement au Moyen Âge ou apparaît la notion d'impetus (qui est un peu l'ancêtre de la notion de quantité de mouvement). En effet, si on considère que l'on lance une pierre assez loin, il est vrai qu'elle finit par retomber mais que se passe-t-il pendant son trajet aérien ? Aristote répond et disant que c'est l'air qui «pousse» la pierre et permet son mouvement. La pierre laisse un vide derrière que l'air remplit et qui fournit une pression sur le mobile. Cette explication n'a évidemment pas tellement convaincu, mais plutôt que d'abandonner la physique d'Aristote (car ces réflexions s'inscrivent dans une théorie aristolicienne plus globale avec des notions qui n'ont plus cours depuis longtemps comme la distinction entre le «mouvement naturel» et le mouvement «violent»), les penseurs du Moyen Âge l'on adapté en ajoutant la notion d'impetus ; lorsque l'on lance une pierre, on lui donne une certaine quantité d'impetus qu'elle épuise au cours de son mouvement, et tombe lorsqu'elle n'a plus d'impetu.

On peut fournir une autre objection à cette idée. Supposons un corps immobile dans un référentiel, aucune force n'agit sur lui. On sait que la vitesse d'un objet n'est pas la même pour tout les référentiels (transformations de galilée). Cela veut dire que dans un autre référentiel, le corps aura une certaine vitesse et suivant l'idée d'Aristote, il doit apparaître dans ce référentiel des forces qui n'existent pas dans l'autre ! Il faut faire attention ici qu'*à priori* ce n'est pas impossible. Mais dans un référentiel galiléen cela semble peu intuitif.

Revenons aux sources du problème. On observe effectivement qu'un corps lancé ou que l'on fait rouler sur le sol finissent par s'arrêter. Mais n'y a-t-il vraiment aucune force qui agissent ?

C'est Galilée qui le premier, a répondu à cette question. Considérons par exemple, un objet que l'on fait glisser sur une table. L'expérience montre que l'objet s'arrête rapidement (d'où la théorie d'Aristote). Maintenant, faisons rouler une balle sur une table. Elle finira par s'arrêter (on suppose une très longue table) mais il lui faudra un temps vraiment très long. Quelle est la différence entre les deux situations ?

La réponse est simple et intuitive : le frottement du mobile sur la table n'est pas le même dans les deux cas. Dans le cas de la balle qui roule, le frottement est très faible. On comprend facilement pourquoi le mouvement s'arrête : ce n'est pas parce qu'aucune force n'agit sur le mobile comme le pensait Aristote, mais bien parce que justement il y a une force qui le ralenti (la force de frottement). On voit que la balle parcourt une grande distance, en imaginant un cas idéal où il n'y a *aucun* frottement, la boule continue à la même vitesse indéfiniment !

5.2 Énoncé du principe

Des réflexions précédentes, on peut en tirer le principe d'inertie : lorsqu'aucune force n'agit sur un objet sa vitesse reste constante (sa vitesse est éventuellement nulle). Attention comme souvent en physique on sous entend «dans un référentiel galiléen» :

> *Tout corps persévère dans son mouvement rectiligne et uniforme, dans son état de repos et dans sa forme tant qu'aucune force n'agisse sur ce corps.*

5.3 Quelques remarques :

Réfléchissons un instant sur l'énoncé du principe. On nous dit qu'un corps est en mouvement rectiligne uniforme tant qu'aucune force n'agit sur lui. Mais ici se pose une question toute simple : qu'est ce qu'une force ? On en a encore donné aucune définition, pour l'instant on utilise uniquement ce terme dans un sens intuitif. Il sera donc utile de préciser cette notion.

Toutefois, le principe d'inertie permet de définir partiellement ce concept. En effet, il ne définit pas ce qu'est une force mais il définit... la notion d'absence de force ! C'est déjà quelque chose d'utile car dans la définition que l'on doit donner à la force, on sait déjà qu'on ne peut avoir de force pour un corps en mouvement rectiligne uniforme. Nous allons donc tout de suite définir un peu plus précisément la notion de force.

6 Deuxième loi de Newton : loi fondamentale de la dynamique

6.1 Idée générale

Imaginez. On dispose d'un corps massif suffisamment isolé du monde pour que l'on ne considère qu'une seule force agissant sur lui. Avant que l'on ne fasse agir une force sur lui, le principe d'inertie nous dit que sa vitesse est constante et sa trajectoire rectiligne. On commence à faire agir une force. Avec ce qu'on sait du principe d'inertie, soit sa vitesse ne sera plus constante, soit sa trajectoire ne sera plus rectiligne (ou les deux à la fois).

On peut traiter en même temps les cas du changement de vitesse et du changement de direction. En effet, dans les deux cas, on a une variation du vecteur vitesse, ce qui veut dire que dans les deux cas le vecteur accélération est non nul. Il faut faire attention au fait que pour un objet ayant une vitesse constante mais une trajectoire courbe, il a bien une accélération non nulle !

L'effet de la force sur l'objet est donc de lui fournir une certaine accélération. Si on reprend notre approche intuitive de la notion de quantité de mouvement, on peut intuitivement supposer que la force correspond à la variation de la quantité de mouvement, ou plus précisément à sa dérivée. On a donc envie d'écrire :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

La force est donc proportionnelle à l'accélération, ce qui n'est intuitivement pas surprenant.

On va convenir de généraliser cela de façon à pouvoir traiter le cas où l'on a plusieurs forces. Il suffit pour cela de postuler que l'on puisse simplement additionner vectoriellement les forces :

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

6.2 Énoncé

> La force totale exercée sur un corps est égale au produit de sa masse m et de son accélération a :
>
> $$\vec{F} = m\vec{a}$$

7 Troisième loi de Newton : loi de l'action et de la réaction

7.1 Énoncé

> Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.

7.2 Quelques remarques

Cette loi est très simple à comprendre. On peut prendre plusieurs exemples : je lance un objet lourd et je sens une force qui me pousse en arrière, ou encore l'exemple très connu de la fusée : la fusée éjecte des gaz avec une certaine force ce qui permet sa propulsion (car la troisième loi de Newton dit que dans ce cas les gaz exercent une force sur la fusée).

On pourrait conclure alors qu'il est impossible de tirer un chariot : comment peux t-on faire puisque si on exerce une force sur le chariot, il exercera une force égale mais opposée ?

La réponse est simple : la force que l'on exerce sur le chariot est bien la même que la force que le chariot va exercer sur nous, mais l'effet de ces deux forces sera différente :

1. Le chariot va avancer sous l'effet de la force et il y aura peut de frottement, car il est sur roues,
2. Nous allons avancer car la force que le chariot exerce sur nous est compensée par le fait que nous allons exercer une force sur la Terre elle même. C'est par l'intermédiaire de nos pied que l'on pousse sur le sol, et c'est donc par le sol que l'on «évacue» la force que tend à nous empêcher d'avancer. C'est encore le principe d'action-réaction : on pousse sur la Terre avec notre pied et la force de réaction de la Terre sur nous nous fait avancer !

8 Conservation de la quantité de mouvement

Supposons un grand nombre N de particules, ayant des quantités de mouvement $\vec{p_i}$. On va définir la quantité de mouvement totale du système, comme la somme vectorielle des quantités de mouvement de toute les particules :

$$\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1. *La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante au cours du temps.*

Par «isolé», on entend par là qu'il n'existe aucune interaction avec une particule (ou quoi que ce soit d'autre) en dehors du système.

Démonstration : on veut donc montrer que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale est nulle. On a :

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \frac{d(\sum_{i=1}^{N} \vec{p_i})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p_i}}{dt}$$

Si on note $\vec{F}_{kl}$ la force exercée par la particule k sur la particule l, alors on a :

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki}$$

Notons ensuite que la troisième loi de Newton, on a :

$$\vec{F}_{kl} = -\vec{F}_{lk}$$

Et donc :

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_i \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ki} = \frac{1}{2}\left(\sum_i \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ki} + \sum_k \sum_{i\neq k} \vec{F}_{ik}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_i \sum_{k\neq i} (\vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ik})\right) = 0$$

Où l'on utilise d'abord le fait que l'on peut librement renommer les indices de sommations, puis on utilise le fait que :

$$\sum_k \sum_{i\neq k} (...) = \sum_i \sum_{k\neq i} (...)$$

C'est à dire que l'on peut sommer d'abord sur i puis sur k, où l'inverse.

Notons que l'on peut généraliser facilement ce théorème dans le cas où l'on a des forces extérieurs $\vec{F}_i$, on a alors :

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{EXT}$$

Où $\vec{F}_{EXT}$ est la somme des forces extérieures.