# La logique

Christophe Roland

4 avril 2014

# Table des matières

# 1 Qu'est ce que la logique ?

## 1.1 Définition

Le mot «logique» vient du grecque «logos» qui signifie «parole, discours», et par extension «rationalité», la logique est donc la science de la raison. Plus précisément, c'est la science qui étudie les règles que doivent respecter tout raisonnement valide, qui permet de distinguer un raisonnement valide d'un raisonnement qui ne l'est pas.

La logique a ceci de particulier que l'on s'y intéresse aussi bien en mathématique pure qu'en philosophie. La façon d'aborder le problème est bien différente dans les deux cas. On va bien sûr dans la suite se focaliser sur la logique mathématique, mais il est bien évident qu'il n'est pas interdit de «philosopher» sur les concepts mathématiques dont nous allons discuter.

## 1.2 La notion de vérité

Discuter de la notion de vérité est extrêmement délicat. Il suffit par exemple de chercher sur internet «vérité absolue» pour trouver un grand nombre de discussions visant à la fois à chercher si il existe une vérité absolue, mais même à comprendre ce que cela veut dire exactement. Il y a dans ce genre de débat une double interrogation : est-ce qu'il existe une vérité objective (donc indépendante de la connaissance que nous avons ou non de cette vérité), et est ce qu'il est possible de l'atteindre, donc à la fois d'accéder à cette vérité, et d'être certain de bien l'avoir trouvé (on peut en effet avoir raison sans en avoir la preuve).

Nous n'allons pas ici nous attarder sur ces problèmes, qui surgissent souvent en raison d'une définition trop imprécise de l'expression «vérité absolue». Je vais juste montrer comment on peux éviter ces problèmes dans le cadre d'une première approche de la notion de vérité. On suppose qu'il existe des vérités objectives dans le sens suivant : si une vérité portant sur un système physique peut dépendre de son observation (d'une façon ou d'une autre, éventuellement tout à fait classique, il n'est sûrement pas question ici de faire de la «métaphysique quantique» !), ou de tout autre influence extérieure, alors on peut toujours parler de vérités portant sur le système plus large :

«système physique + observateur + tout autre système physique en interaction avec le système étudié»

Notez ici l'anthropocentrisme : il n'y a a priori pas de raison de distinguer l'observateur des autres sources d'influence, en fait la seule raison de se présence est de supprimer toute la problématique de la subjectivité de l'observateur ou de son influence sur le système. Mais en faisant cela, on «triche», car on ne peut pas, étant nous-même observateurs du monde, *établir* une vérité portant sur un système dont nous faisons partie, précisément à cause de notre subjectivité et de nos interactions avec le monde extérieure Notons quand même en passant que si l'on ne peut donc pas en principe être certain de la véracité d'une théorie, on peut en avoir un certain niveau de confiance, comme nous l'avons discuté dans le chapitre sur la science. Il n'est donc pas question de dissocier complètement la science de la «réalité extérieure», ce serait là une position relativiste très extrême. Mais ce n'est pas important pour le sujet qui nous préoccupe, il ne s'agit pas ici de découvrir ces vérités, mais de savoir qu'elles sont là, ce qui est suffisant pour en parler.

### 1.3 Le paradoxe du menteur

Ces problèmes étant (au moins pour l'instant) mis de côtés, on va rencontrer un type de problème bien plus grave. Le problème est de savoir si la phrase suivante est vraie ou fausse :

Cette phrase est fausse.

On voit tout de suite l'impossibilité de décider si cette phrase est vrai ou fausse : si elle vraie, c'est qu'elle est fausse, et inversement ! Ce problème très connus est appelé *paradoxe du menteur*. Il existe un certain nombre de solutions proposées pour résoudre ce paradoxe, nous allons nous contenter d'exposer la solution donnée par le logicien Alfred Tarski.

L'énoncé «Cette phrase est fausse» est écrite dans un langage (ici le français) qui est *sémantiquement clos*. Un langage sémantiquement clos est un langage dans lequel on peut exprimer la vérité d'un énoncé écrit dans cette même langue. C'est cette «capacité» de ces langages qui permettent l'apparition de paradoxes comme le paradoxe du menteur, les pourquoi les langages sémantiquement clos sont dit *inconsistants*.

On peut donc éviter ce type de paradoxe par l'utilisation de *langages sémantiquement ouvert* (qui sont simplement les langages qui ne sont pas sémantiquement clos). Mais alors, si on ne peut exprimer la vérité d'un énoncé dans un langage sémantiquement ouvert, comment parler de la vérité d'un énoncé dans un tel langage ?

Pour cela, il faut utiliser un autre langage, précisément un *méta-langage*. Si on veut exprimer (définir) la notion de vérité dans un langage $L$, on peut le faire dans un méta-langage $ML$. Ce langage est lui-même sémantiquement ouvert (puisque c'est *requis* pour ne pas avoir un langage inconsistant), on ne peut donc pas dans $ML$ exprimer la vérité d'un énoncé de $ML$. Pour cela, il faut un autre (méta)-langage, $MML$, et ainsi de suite. Il apparaît donc une *hiérarchie* dans les langages, c'est ainsi que cette solution du paradoxe du menteur est appelée la *solution hiérarchique*.

## 2 Notion naïve d'ensemble

### 2.1 Introduction

Pour introduire proprement la logique, il faut, comme on vient de le voir, s'intéresser de près à la notion de langage. Nous allons devoir utiliser la notion (intuitive) d'ensemble pour cela. La notion mathématique précise d'ensemble sera définie dans le prochain chapitre qui sera consacré à ce sujet. Mais en attendant, nous n'avons pas besoin d'une notion formelle d'ensemble pour exposer les principes de la logique. Le vouloir absolument mènerait de toute façon à une impasse, car nous avons besoin de la logique pour construire la théorie des ensembles, et nous serions alors dans un cercle vicieux. Nous allons donc dans la suite utiliser la notion d'ensemble de façon restreinte, et d'une certaine façon «déconnectée» de la notion rigoureuse de théorie des ensembles que nous développerons après. On peut alors ignorer tout les paradoxes qui surgissent lorsque l'on parle d'ensemble de façon naïve, car nous utiliserons la notion d'ensemble que pour définir certains concepts précis, dit autrement *nous n'avons pas besoin* d'une théorie des ensembles formelle et «complète», c'est aussi simple que ça. Dans cette section, on ne s'occupe que de définir certaines notations que nous utiliserons lorsque l'on utilisera la notion d'ensemble.

### 2.2 Concepts et notations

Un *ensemble* est une collection non ordonnée d'«objet» que l'on appelle des *éléments* de cet ensemble. Lorsqu'un ensemble $E$, a comme éléments $a_1, a_2, ..., a_n$, on note :

$$E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Dire que $x$ soit un élément d'un ensemble $E$ s'écrit :

$$x \in E$$

Dans le cas contraire, on peut écrire :

$$x \notin E$$

## 3 Le langage formel

Nous avons vu sur l'exemple du paradoxe du menteur que la notion de langage est importante pour comprendre la notion de vérité. Nous allons donc tenter de formaliser le mieux possible cette notion.

### 3.1 Langage formel et langage naturel

Un *langage naturel* est tout simplement définit comme étant un langage utilisé dans la vie de tout les jours, comme par exemple, le français. Comme nous l'avons vu, les langages naturels sont sémantiquement clos, donc inconsistants. En plus de cet inconvénient majeur, les langages naturels ont deux inconvénients pratiques quand on les utilise en mathématique :

1. la complexité des phrases qui rend les choses plus compliquées, il faut parfois plusieurs lignes et une phrase complètement incompréhensible, pour dire quelque chose qui peut se résumer par une expression mathématique bien plus simple et courte,
2. le fait que les ambiguïtés du langage courant peuvent conduire à des erreurs de raisonnement.

Ces inconvénients nous poussent à définir des langages ayant des règles très strictes tout en étant le plus facile à lire possible, ce sont des *langages formels*. Bien on demandera à ces langages formels d'être des langages sémantiquement ouverts.

## 3.2 Définir la notion de langage

En faisant l'analogie avec les langages naturels, on voit qu'un langage se compose de deux éléments différents. D'une part, nous avons un *alphabet* propre à un langage. Que se soit pour les langages formels ou naturels, le concept d'alphabet est identique, à savoir qu'un alphabet est tout simplement un ensemble de symboles que nous allons utiliser pour construire les *mots* du langage. Un mot est simplement une suite ordonnée de symboles de l'alphabet.

On peut construire n'importe quel mot en inventant une suite quelconque de lettres de l'alphabet, mais tout les mots possibles ne font pas partie du langage. Par exemple, l'expression «hgjhytjh» est bien une suite des lettres de l'alphabet latin, mais ne fait pas partie de la langue française. Il faut au langage un autre élément, qu'on appelle une *syntaxe*, qui est un ensemble de règles qui définissent quels mots appartiennent au langage.

Nous pouvons donc définir de façon précise la notion de langage formel, par une série de définitions :

**Définition 1.** *Un* alphabet *est un ensemble non vide d'élement appelés* symboles*.*

**Définition 2.** *Un* mot *d'un alphabet est une suite ordonnée et finie de symboles de l'alphabet.*

**Définition 3.** *Soit un alphabet, un ensemble fini de mots de l'alphabet est appelé un* langage formel*.*

Ainsi, un langage formel est un sous ensemble de l'ensemble des mots de l'alphabet. Si on se donne une série de règles auxquelles obéissent les mots du langages et seulement ceux-ci, ces règles sont appelé la *syntaxe* du langage.

## 3.3 Construisons un exemple

On peut donner un exemple pour y voir plus clair et définir un langage formel simple : on va prendre un alphabet et une syntaxe quelconque, ne voyez aucune logique particulière dans le choix que l'on va faire.

L'alphabet du langage est l'ensemble contenant les éléments suivants : $A, B, C, +, =$.

Et la syntaxe sera composés des règles suivantes :

1. aucun mot du langage ne peut commencer ou terminer par $=$,
2. aucun mot du langage ne peut commencer ou terminer par $+$,
3. dans un mot du langage, on a un et un seul symbole «$=$»,
4. dans un mot du langage, un symbole sur deux est une lettre.

On a donc définit un langage formel simple. Les mots de ce langage ressemblent à des équations mathématiques, par exemple, $A + B + C = A + C$ est un mot possible. En effet, le premier et le dernier symbole ne sont ni «$=$» ni «$+$», on a un seul symbole «$=$», et un symbole sur deux est bien une lettre.

On se rend compte aussi que certains agencement de symboles ne sont pas des mots du langage : par exemple, $= +A + +BC$ ne l'est pas.

# 4 Introduction au calcul des propositions

## 4.1 Introduction

Nous allons maintenant introduire une classe de langages particuliers, que l'on va appeler *langages propositionnels*. Les mots de ces langages seront appelés des *énoncés*, parce que nous voulons pouvoir dire que ces «mots» sont vrais ou faux. Les mots des langages propositionnels seront aussi appelés *formules*. Nous verrons plus tard d'autres langages où l'on fera une distinction entre mots du langages, formules et énoncés.

Nous pouvons commencer par introduire un type particulier d'énoncés : les *proposition*. Ces propositions sont aussi appelées *formules atomiques* (atomique au sens de «insécable»), c'est à dire que ce sont des formules qui ne sont pas construits à partir d'autres formules.

Dans les langages propositionnels, on note les propositions par un simple symbole, généralement avec une lettre minuscule. De combien de symboles avons-nous besoin ? Il n'y a pas de réponse à cette question dans le sens que l'on définit ici une classe de langages et non un langage en particulier, aussi on peut autoriser un nombre de symboles différents suivant les langages. Il en faut toutefois au moins un (sans quoi il n'y aurait aucun mot dans le langage, à part le mot vide qui ne contient aucun symbole), mais on peut en avoir autant que l'on veut, même une infinité. On conviendra d'utiliser les lettres : $p, q, r, s, ...$ comme symboles propositionnels, éventuellement, on peut rajouter un indice si on manque de lettres et utiliser $p_1, q_1, ...p_2, q_2, ...$ (notez qu'une écriture comme $p_1$ est considéré comme *un seul* symbole).

Si on s'arrête ici, on aura des langages parfaitement inutiles. L'idée est de construire des formules à partir des symboles propositionnels et d'autres symboles, qu'il reste à définir, que l'on appellera des *connecteurs logiques*. Comme leur nom l'indique, il vont «connecter» les formules atomiques de façon à construire des *formules composées*, qui seront donc des formules avec plus d'un symbole. On peut s'attendre à ce que l'on puisse les utiliser de la même façon pour «connecter» des formules atomiques et des formules composées. Ainsi, on pourra définir, étant donné un certain connecteur logique et un certain nombre d'énoncés (de formules), comment on peut construire une formule qui les combine, sans se préoccuper de savoir si les formules que l'on combine sont atomiques ou non.

Pour représenter symboliquement cette construction, un problème se pose. On voudrait disposer de symboles qui puissent représenter *n'importe quel* énoncé, pour définir proprement la syntaxe des langages propositionnels. On conviendra alors de noter les énoncés par des lettres majuscules $A, B, C, ...$, mais ici il faut bien comprendre que ces symboles *ne font pas partie des langages propositionnels* ! ! Il servent à définir plus facilement la syntaxe de tels langages, on peut dire que ces symboles font partie d'un *méta-langage*.

Il faudra aussi définir proprement la *sémantique* de ces langages, c'est à dire se poser la question de la signification des énoncés. On peut déjà dire qu'à chaque proposition correspond une *valeur de vérité* : soit vrai soit faux. Anticipant un peu sur la suite, on peut déjà donner des principes qui seront valable pour n'importe quel énoncé :

1. principe de bivalence : les deux seules valeurs de vérité possible sont le vrai et le

faux,

2. principe du tiers-exclu : à *tout* énoncé on associe soit le vrai, soit le faux, aucun énoncé est dépourvu de valeur de vérité,
3. principe de non-contradiction : aucun énoncé ne avoir plus d'une valeur de vérité, un énoncé ne peut donc être à la fois vrai et faux.

On a alors la définition suivante :

**Définition 4.** *Soit $L$ un langage propositionnel. Une $L$-assignation est une relation qui à chaque formule atomique de $L$ associe une et une seule valeur de vérité, soit $V$ (vrai), soit $F$ (faux).*

## 4.2 Connecteurs logiques

Prenons un exemple. Considérons deux énoncés $A$ et $B$. On peut imaginer que de $A$ on peut déduire $B$, c'est à dire que si $A$ est vrai, alors $B$ est vrai lui aussi. On écrit alors : «si $A$ alors $B$». Mais on a alors que la phrase «si $A$ alors $B$» peut être vrai ou fausse.

On peut faire un raisonnement intuitif en associant à $A$ et $B$ des énoncés du langage naturel. Si $A$ veut dire «ceci est un est cobra» et $B$ veut dire «ceci est un serpent», alors «si $A$ alors $B$» veut dire «si ceci est un cobra alors ceci est un serpent» ce qui est vrai. Mais on peut imaginer que $A$ veuille dire «ceci est un tigre» et alors «si $A$ alors $B$» devient faux.

On comprend alors que lorsque l'on combine des énoncés de cette manière, on obtient des énoncés qui ont aussi une valeur de vérité, et que cette valeur de vérité dépend des valeurs de vérités des énoncés $A$ et $B$.

Les mots «si» et «alors» sont des connecteurs logiques (en fait il n'en forment qu'un puisqu'on les utilisent ensembles). Nous allons maintenant en voir d'autres et représenter chaque connecteur par un symbole différent.

### 4.2.1 Le connecteur «non» (négation)

C'est le connecteur le plus simple de tous. Considérons une proposition $A$. La proposition «non $A$» est vrai si $A$ est faux, et fausse si $A$ est vrai. Ce connecteur s'écrit symboliquement $\neg$.

On peut illustrer cela dans un tableau que l'on appelle «table de vérité» :

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Ce type de tableau est simple et nous l'utiliserons encore beaucoup.

### 4.2.2 Le connecteur «ou» (disjonction)

Ce connecteur permet de former des énoncés comme «$A$ ou $B$» mais il faut faire attention que si $A$ et $B$ sont tout les deux vrais alors «$A$ ou $B$» est vrai aussi (c'est juste une convention, ne vous casser pas la tête à savoir pourquoi !). C'est pourquoi on précise parfois «ou inclusif» (par opposition au «ou exclusif» souvent utilisé en langage courant). Ce connecteur s'écrit $\vee$.

On peut tout comme avec le connecteur «non», résumer tout cela par une table de vérité :

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Se souvenir de cette table est très facile : On a simplement que $A \vee B$ est faux si $A$ et $B$ sont tout les deux faux, vrai dans tout les autres cas.

### 4.2.3 Le connecteur «et» (conjonction)

Ce connecteur permet de former des énoncés comme «$A$ et $B$». Sa signification est exactement la même que celle du mot «et» français : «$A$ et $B$» n'est vrai que si $A$ et $B$ sont tout les deux vrais. Il est représenté par le symbole $\wedge$.

Sa table de vérité est la suivante :

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

### 4.2.4 Le connecteur «si... alors» (conditionnel matériel ou implication)

Il est représenté par le symbole : $\Rightarrow$.

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

«si $A$ alors $B$» veut dire tout simplement que si $A$ est vrai, $B$ l'est nécessairement aussi.

Mais la table de vérité peut surprendre. Pourquoi les deux «V» au bas de la colonne de droite ? Ici pour comprendre, considérons chaque cas un à un.

Premier cas : le vrai implique le vrai. C'est assez logique : par définition de l'implication, si $A$ est vrai, $B$ est vrai aussi. Deuxième cas : le vrai n'implique pas le faux ! ! Logique encore une fois : à partir d'une proposition vraie, on ne pourra jamais en déduire une proposition fausse.

Donnez une valeur de vérité à $A \Rightarrow B$ quand $A$ est faux est plus délicat. Commençons par le cas où $B$ est vrai. On voit dans la table de vérité que $A \Rightarrow B$ est vrai. Cela veut dire qu'à partir d'une proposition fausse, on peut très bien aboutir à une conclusion vraie. Cela peut paraître étrange mais nous allons donner un exemple.

Supposons donc que $A$ veuille dire : « $2 + 2 = 5$» (proposition fausse donc). On peut en déduire facilement une proposition vraie : il suffit de multiplier chaque cotés de l'égalité par zéro. On a donc $0 \cdot (2 + 2) = 0 \cdot 5$ ce qui donne $0 = 0$ c'est à dire une proposition vraie ! Le faux implique donc le vrai.

Enfin, montrer que le faux implique le faux est très facile. en effet de «$2 + 2 = 5$» on peut déduire directment que... «$2 + 2 = 5$» ! !

#### 4.2.5 Le connecteur «est équivalent à»

Le connecteur «équivalence» s'écrit symboliquement : $\Leftrightarrow$et veut dire : «à la la même valeur de vérité que».

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

#### 4.2.6 D'autres connecteurs

Ces connecteurs ne sont pas ou peu utilisés en mathématique, mais plutôt en électronique et en informatique. Comme on les utilise surtout en informatique, on utilise le «1» à la place du «V» et le «0» à la place du «F».

Ces connecteurs sont aussi appelés des «portes logiques». La porte NOT est le «non»logique, la porte AND est le «et» et la porte OR est le «ou». On trouve aussi la porte NOR (NOT OR) :

| A | B | A NOR B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

La porte XOR (ou exclusif) :

| A | B | A XOR B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

La porte NAND (NOT AND) :

| A | B | A NAND B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

### 4.3 Langages propositionnelles

Il est maintenant facile de donner l'alphabet et la syntaxe des langages propositionnels : L'alphabet d'un langage de logique propositionnelle est constitué :

1. d'un ensemble éventuellement infini de symboles propositionnels : $p, q, r, s, ...,$
2. des symboles : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$
3. des séparateurs (parenthèses) : «(» et «)».

Les parenthèses sont utiles dans les énoncés logiques car il faut se rendre compte par exemple qu'un énoncé de la forme $\neg A \vee B$ n'est pas équivalent à un énoncé de la forme $\neg(A \vee B)$.

On peut ensuite définir la syntaxe :

Syntaxe : l'ensemble des formules d'un langage propositionnel est le plus petit ensemble tel que :

— si $A$ est un symbole propositionnel alors $A$ est une formule,
— si $A$ est une formule, alors $\neg A$ est une formule,
— si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \vee B)$ est une formule,
— si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \wedge B)$ est une formule,
— si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \Rightarrow B)$ est une formule,
— si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \Leftrightarrow B)$ est une formule.

Petite remarque : pourquoi dit-on dans la définition : «le plus petit ensemble» ? L'explication est simple. Si on avait la même définition mais sans préciser cela, on ne saurait pas par exemple, si la formule $A \vee \wedge B$ est valide ou pas. En effet, la définition n'implique pas que cette formule existe, mais ne l'interdit pas non plus. C'est pour cela que l'on précise «le plus petit ensemble», sinon la définition ne serait pas correcte.

### 4.4 Valuation

Étant donné un langage propositionnel $L$ et une $L$-assignation, on peut attribuer une valeur de vérité à chaque formule atomique. Mais alors, on peut assigner une valeur de vérité aux formules composées grâces aux tables de vérité, à la $L$-assignation correspond donc une *$L$-valuation* qui fait fait à *tout* les énoncés une valeur de vérité. On va maintenant énoncer un théorème qui dit simplement qu'étant donnée une $L$-assignation, il existe une et une seule $L$-valuation associée. On verra alors que les tables de vérités ne sont que des conséquences de ce théorème, qui définit comment on associe une valeur de vérité à toute formule.

**Théorème 1.** *Soit $L$ un langage propositionnel, à chaque $L$-assignation possible $M$ correspond une et une seule relation appelée* $L$-valuation *et notée $V_M$, qui à chaque énoncé $A$ fait correspondre une et une seule valeur de vérité qui ne peut être que $V$ ou $F$, tel que, en notant $M(A)$ la valeur de vérité associée à la proposition $A$ par $M$, et $v_M(A)$ la valeur de vérité associée à la proposition $A$ par $V_M$ :*

- *Si $A$ est une proposition, $v_M(A) = M(A)$.*
- *Si $A$ est une formule, $v_M(\neg A) = V$ si et seulement si $v_M(A) = F$.*
- *Si $A$ et $B$ sont des formules, $v_M(A \vee B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = V$ et/ou $v_M(B) = V$.*
- *Si $A$ et $B$ sont des formules, $v_M(A \wedge B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = V$ et $v_M(B) = V$.*
- *Si $A$ et $B$ sont des formules, $v_M(A \Rightarrow B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = F$ et/ou $v_M(B) = V$.*
- *Si $A$ et $B$ sont des formules, $v_M(A \Leftrightarrow B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = v_M(B)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que pour toute formule $X$, on a au moins une valuation. Si $X$ est une proposition, on a tout simplement $v_M(X) = M(X)$. Sinon, par la syntaxe du langage, on sait que $X$ peut s'écrire sous au moins l'une des forme suivantes : $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$ et $(A \Leftrightarrow B)$, où $A$ et $B$ sont des formules. Les règles données dans le théorème nous donne alors une valeur de vérité, connaissant la valeur de vérité de $A$ et $B$. Mais eux-mêmes peuvent se mettre sous au moins l'une des formes $\neg A'$, $(A' \vee B')$, $(A' \wedge B')$, $(A' \Rightarrow B')$ et $(A' \Leftrightarrow B')$, donc on peut obtenir leur valeur de vérité en fonction d'autre énoncés et ainsi de suite jusqu'à arriver à la valuation de propositions.

Montrons maintenant qu'il n'y a qu'une valuation pour chaque formule. Pour les propositions, c'est trivialement vrai. Sinon, supposons deux valuations $v_M$ et $v_M{}'$ différentes sur certaines formules. Si pour deux formules $A$ et $B$ on a $v_M(A) = v_M{}'(A)$ et $v_M(B) = v_M{}'(B)$ (et il est toujours possible d'en trouver puisque l'on peut choisir des propositions), alors on a $v_M(\neg A) = v_M{}'(\neg A)$, $v_M(A \vee B) = v_M{}'(A \vee B)$, ..., et on peut refaire le même raisonnement avec ces formules composées, et ainsi de suite. De proche en proche, on a $v_M(X) = v_M{}'(X)$ pour toute formule $X$.

Notons que les tables de vérités sont une *conséquence* de ce théorème, une façon schématique simple de représenter les règles qui définissent les $L$-valuations.

# 5 Tautologies

## 5.1 Définition

**Définition 5.** *Une* tautologie *est un énoncé qui est vrai pour toute $L$-valuation.*

Exemples :

Un énoncé de la forme $A \Rightarrow A$ est une tautologie : que $A$ soit vrai ou faux, cette formule est toujours vrai. On peut le démontrer avec une table de vérité.

| $A$ | $A \Rightarrow A$ |
|---|---|
| V | V |
| F | V |

Un énoncé de la forme $A \vee \neg A$ (principe du tiers exclu) est une tautologie : on peut le démontrer avec une table de vérité.

| $A$ | $\neg A$ | $A \vee \neg A$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

On voit donc ici la méthode de démonstration avec une table de vérité : la dernière colonne ne contient que des «V», c'est donc que l'énoncé est forcément vrai.

## 5.2 Tautologies remarquables

Voici maintenant une liste de tautologie. Elle peuvent parfois être utiles pour simplifier un énoncé. En effet, si $A$ et $B$ sont des énoncés et que l'on a $A \Leftrightarrow B$, on peut remplacer $A$ par $B$ ou $B$ par $A$.

Identité

$$A \Leftrightarrow A$$

Double négation

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A$$

Idempotence

$$A \Leftrightarrow (A \vee A)$$
$$A \Leftrightarrow (A \wedge A)$$

Commutativité

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$
$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

Associativité

$$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$
$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

Distributivité

$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$
$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

Absorption

$$(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A$$
$$(A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow A$$

Loi de De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Conditionnel matériel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Contraposition

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Équivalence matérielle

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Exportation-importation

$$((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Pour compléter, on peut lister une série de tautologie qui ne sont pas des équivalences (c'est à dire sans le symbole $\Leftrightarrow$) :

Identité

$$A \Rightarrow A$$

Tiers exclu

$$A \vee \neg A$$

Loi de Peirce

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Modus Ponens

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

Modus Tollens

$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

Modus Barbara

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

# 6 Calcul des prédicats

## 6.1 Motivations

Nous allons maintenant généraliser les langages propositionels et définir ainsi des *langages prédicatifs*. Ceci nous permettra d'exprimer des formules correspondants à des énoncés utilisant des expressions comme «pour tout» et «il existe». Le but final est d'écrire en langage formel des raisonnements comme :

1. Tout les hommes sont mortels,
2. Socrate est un homme,
3. donc, Socrate est mortel.

Nous allons donc introduire des formules où apparaissent une ou plusieurs *variables*. Ceci nous permettra d'exprimer formellement des choses comme : «$x$ est un nombre entier». Dans cette expression, $x$ est une variable, et l'expression peut être vrai ou fausse suivant la valeur de $x$. On va aussi introduire des symboles, que l'on va appeler des *constantes*, qui seront analogues aux variables si ce n'est qu'ils ont une «valeur» fixée. Les variables et les constantes seront aussi appelés des *termes*.

Comme on généralise les langages propositionnels, on retrouve les symboles propositionels dans les langages prédicatifs. On voudrait ensuite ajouter des analogues aux propositions, mais qui puisse dépendre d'un certain nombre $n$ de termes, les symboles correspondants seront appelés *symboles prédicatifs d'arité $n$*. Puisqu'une proposition ne dépend d'aucun terme, un symbole propositionnel peut être vu comme un symbole prédicatif d'arité zéro.

On peut aussi imaginer qu'un terme puisse dépendre d'un certain nombre $n$ d'autre terme. Pour cela, on va introduire des symboles appelés *symboles fonctionnels* d'arité $n$.

## 6.2 Quantificateurs existentiels et universels

Les différents connecteurs vu en logique propositionnelle restent tout à fait d'actualité. Mais pour le calcul des prédicats, nous devons introduire deux nouveaux symboles logiques : ce sont des *quantificateurs*.

### 6.2.1 Le quantificateur existentiel

Ce quantificateur signifie : «il existe» ou plus précisément : «il existe au moins un» et est noté $\exists$. On peut écrire :

$$\exists x A$$

Et on doit comprendre : «il existe au moins un $x$ tel que $A$ soit vrai».

On rencontre parfois en mathématique des expressions du type :

$$\exists ! A$$

Et on doit comprendre : «il existe un et un seul $x$ tel que $A$ soit vrai». On ne va cependant pas utiliser cette écriture en logique.

### 6.2.2 Le quantificateur universel

Ce quantificateur signifie «quelque soit» et est noté $\forall$. On peut écrire :

$$\forall x A$$

Et on doit comprendre : «quelque soit $x$, $A$ est vrai».

## 6.3 Alphabet et syntaxe

Le langage de la logique du premier ordre est constitué des ensembles suivants :

1. un ensemble éventuellement infini de symboles propositionnels : $p, q, r, s, ...,$
2. un ensemble éventuellement infini de symboles prédicatifs d'arité $n$ ($n$ est entier strictement positif) : $p^1, q^1, r^1, ..., p^2, q^2, r^2, ...,$
3. un ensemble éventuellement infini de symboles fonctionnels d'arité $n$ ($n$ est entier strictement positif) : $f^1, g^1, h^1, ..., f^2, g^2, h^2, ...,$
4. un ensemble infini de symboles appelés *variables* : $x, y, z, ...,$
5. un ensemble infini de symboles appelés *constantes* : $a, b, c, ...,$
6. l'ensemble des symboles logiques : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$
7. et les parenthèse : (, ).

Il reste à définir la syntaxe. Il faut rappeler que si pour le cas la logique des propositions on avait uniquement des formules, on a deux notions distinctes en logique des prédicats : les formules et les termes.

L'ensemble des *termes* est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que :

1. toute variable est un terme,
2. toute constante est un terme,
3. si $T_1, T_2, ..., T_n$ sont des termes, alors si $F$ est un symbole fonctionnel d'arité $n$, $FT_1T_2...T_n$ est un terme.

L'ensemble des *formules* est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que :

1. toute proposition est une formule,
2. si $T_1, T_2, ..., T_n$ sont des termes, alors si $P^n$ est un prédicat d'arité $n$, $P^nT_1T_2...T_n$ est une formule,
3. si $A$ est une formule, alors $\neg A$ est une formule,
4. si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \vee B)$ est une formule,
5. si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \wedge B)$ est une formule,
6. si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \Rightarrow B)$ est une formule,
7. si $A$ et $B$ sont des formules, alors $(A \Leftrightarrow B)$ est une formule,
8. Si A est une formule et $X$ est une variable, $\forall X A$ est une formule,
9. Si A est une formule et $X$ est une variable, $\exists X A$ est une formule.

### 6.4 Énoncés des langages prédicatifs

Dans les langages propositionnels, nous n'avons pas fait de distinctions entre les formules et les énoncés. Nous allons maintenant en faire une, il existera donc des formules qui ne sont pas des énoncés. On commence par définir la notion de *sous-formules* :

**Définition 6.** *Soit $A$ une formule, l'ensemble $S(A)$ des* sous-formule *de $A$, est le plus petit ensemble de formules tel que :*

1. $A \in S(A)$,
2. *si* $\neg B \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$,
3. *si* $B \vee C \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$ *et* $C \in S(A)$,
4. *si* $B \wedge C \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$ *et* $C \in S(A)$,
5. *si* $B \Rightarrow C \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$ *et* $C \in S(A)$,
6. *si* $B \Leftrightarrow C \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$ *et* $C \in S(A)$,
7. *si* $\forall XB \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$,
8. *si* $\exists XB \in S(A)$, *alors* $B \in S(A)$.

**Définition 7.** *Une occurrence d'une variable $X$ dans une formule $A$ est* liée *si il existe une sous-formule de $A$ de la forme $\exists XB$ ou $\forall XB$, $B$ étant une formule. Dans le cas contraire, elle est dite* libre.

**Définition 8.** *Un* énoncé *est une formule sans occurrence libre de variable.*

L'interêt de cette définition est que la valeur de vérité d'un énoncé est ainsi indépendante de toute variable. Si on remplace donc, dans un énoncé, une variable par une constante, cela n'a de sens que si il y a une occurrence libre de cette variable dans l'énoncé. On peut exprimer cette idée de façon plus générale, en remplaçant une variable par un terme dans lequel ne figure aucune variable, un tel terme sera appelé *terme clos*. Intuitivement, un terme clos est un «terme constant». On va écrire, si $A$ est une formule (pas forcément un énoncé) et $T$ un terme clos :

$$A[X := T]$$

la formule obtenue en remplaçant $X$ par $T$ dans $A$, si $X$ est une constante, et la formule obtenue en remplaçant les occurrences libre de $X$ par $T$ dans $A$, si $X$ est une variable.

## 7 Introduction à la théorie des modèles

### 7.1 Motivations

Considérons les deux énoncés suivant :
— «La Terre tourne autour du Soleil.»
— «Si il neige, il neige.»

Les deux énoncés sont vrais, mais il n'ont pas vraiment le même statut. Nous savons que le premier énoncé est vrai grâce (entre autres) aux observations astronomiques. Mais à la limite, on pourrait imaginer un univers parallèle dans lequel ce n'est pas le cas. Par contre, le deuxième énoncé est forcément vrai, c'est à dire il n'y a pas besoin de faire la moindre observation pour être sûr que c'est vrai. On peut dire que cet énoncé est vrai dans *tout les univers possibles*. On ne peut se placer dans un univers imaginaire dans lequel cet énoncé serait faux.

Comme le deuxième énoncé est vrai dans tout les mondes possibles, on va dire que cet énoncé est une *loi logique*. On peut définir cette notion de façon un peu plus précise. Au lieu de parler de «mondes possibles», nous allons parler de *modèles*. Une loi logique est donc un énoncé vrai dans tout les modèles. Si un énoncé $A$ est vrai dans un certain modèle $M$ (un certain monde), alors on dit que $M$ est modèle de $A$, et on écrit cela symboliquement :

$$M \models A$$

Si $A$ est une loi logique, on peut écrire :

$$\models A$$

Et il faut comprendre par cette notation que tout modèle $M$ est modèle de $A$. De même que l'on a définit la notion de loi logique, il est naturel de définir la notion de *contradiction*, une contradiction est simplement un énoncé faux dans tout les modèles, et l'on peut noter :

$$\not\models A$$

Il reste à définir de façon précise la notion de modèle.

## 7.2 Notion de modèle

Nous allons énoncer une série de définitions qui va nous amener à définir rigoureusement la notion de modèle.

**Définition 9.** *Soit $U$ un ensemble, un $n$-*uple *de $U$ est une suite ordonnée de $n$ éléments de $U$.*

Notation : si les éléments de $U$ sont notés $u_1, u_2, u_3, ...$, alors $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est un $n$-uple de $U$. Un élément de $U$ peut être vu comme un 1-uple, et un 2-uple est aussi appelé un *couple*. On va aussi convenir que l'on a :

$$(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n) = ((u_1, u_2, ..., u_{n-1}), u_n)$$

Notons donc $U^n$ l'ensemble des $n$-uples de l'univers, nous avons alors la :

**Définition 10.** *Soit $U$ un ensemble, une* relation $n$-aire sur $U$ *est un sous-ensemble de $U^n$.*

On conviendra d'utiliser de façon générale le terme de relation pour désigner une relation d'arité $n$ quelconque.

**Définition 11.** *Soit $E$ et $F$ des ensembles, une* fonction $n$-aire définie sur $E$ et à valeur dans $F$*, est un ensemble de couples $(a, b)$ tel que $a$ appartienne à $E^n$ et $b$ appartienne à $F$, et tel que pour un élément donné $x$ de $E^n$, il existe au plus un élément $y$ de $F$, tel quel le couple $(x, y)$ soit élément de la fonction.*

On conviendra d'utiliser de façon générale le terme de fonction pour désigner une fonction d'arité $n$ quelconque.

**Définition 12.** *Soit $E$ et $F$ des ensembles, une* application $n$-aire définie sur $E$ et à valeur dans $F$*, est une fonction définie sur $E$ et à valeur dans $F$ tel que pour tout élément $x$ de $E^n$, il existe un élement $y$ de $F$, tel que le couple couple $(x, y)$ soit élément de la fonction.*

On conviendra d'utiliser de façon générale le terme d'application pour désigner une application d'arité $n$ quelconque.

**Définition 13.** *Soit $L$ un langage prédicatif, une* $L$-structure *est la donnée d'un ensemble non vide $U$ appelé* univers*, d'un ensemble de relations sur $U$ appelé* prédicats*, et d'un ensemble d'appplications définies sur $U$ et à valeur dans $U$. De plus, pour tout $n$, si $L$ possède des symboles prédicatifs $n$-aires, il doit y avoir dans la $L$-structure au moins un prédicat $n$-aire ; de même, pour tout $n$, si $L$ possède des symboles fonctionnels $n$-aires, il doit y avoir dans la $L$-structure au moins une application $n$-aire.*

**Définition 14.** *Soit $L$ un langage prédicatif, $U$ l'univers d'une $L$-structure, une* interprétation *de $L$ associe :*

1. *à chaque symbole propositionnel de l'alphabet de $L$ une et une seule valeur de vérité : $T$ ou $F$,*
2. *à chaque constante de l'alphabet de $L$ un élément de $U$,*
3. *à chaque symbole prédicatif $n$-aire de l'alphabet de $L$ un prédicat $n$-aire de la $L$-structure,*
4. *à chaque symbole fonctionnel $n$-aire de l'alphabet de $L$ une application $n$-aire de la $L$-structure.*

Nous arrivons enfin à la définition d'un modèle :

**Définition 15.** *Soit $L$ un langage prédicatif, un* modèle *pour $L$ est la donnée d'une $L$-structure et d'une interprétation de $L$.*

Exemple. Considérons un langage prédicatif très simple : aucun symbole propositionnel, seulement deux symboles prédicatifs, $p^1$ et $q^1$ (d'arité 1), et aucun symbole fonctionnel. Définissons maintenant une $L$-structure. Comme Univers, prenons l'ensemble :

$$U = \{\text{chat}, \text{chien}, \text{pigeon}, \text{crocodile}, \text{ordinateur}\}$$

Et prenons les deux prédicats (unaires) suivant :

$$P = \{\text{chat}, \text{chien}, \text{pigeon}, \text{crocodile}\}$$

et :

$$Q = \{\text{chat}, \text{chien}\}$$

$P$ correspond intuitivement à «est un animal», tandis que $Q$ correspond intuitivement à «est un mammifère». On va bien sûr choisir comme interprétation de $L$ celle qui associe au prédicat $P$ le symbole prédicatif $p^1$, et au prédicat $Q$ le symbole prédicatif $q^1$. Toujours intuitivement, la phrase (ou énoncé) suivante :

«Tout les mammifère sont des animaux.»

va s'écrire :

$$\forall x(q^1x \Rightarrow p^1x)$$

Si de plus, on convient que (par exemple) l'interprétation associe la constante $a$ à l'élément «ordinateur», alors la phrase :

«L'ordinateur n'est pas un animal.»

correspond à :

$$\neg p^1a$$

Autre exemple. Choisissons un langage prédicatif sans symbole propositionnel, un symbole prédicatif binaire $p^2$, et un symbole fonctionnel binaire $f^2$. On choisit comme Univers :

$$U = \{0, 1, 2\}$$

Et on définit un prédicat binaire :

$$P = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$$

et une application binaire :

$$F = \{(0,0,0), (0,1,1), (0,2,2), (1,0,1), (1,1,2), (1,2,0), (2,0,2), (2,1,0), (2,2,1)\}$$

Intuitivement, $P$ correspond à l'égalité, et $F$ à l'addition modulo trois (c'est à dire une addition où l'on soustrait un multiple de trois si on arrive ou dépasse trois, de sorte que le résultat soit strictement inférieur à trois, ainsi $2+2=4$ devient $2+2=1 \mod 3$). On va dans l'interprétation associer $P$ à $p^2$ et $F$ à $f^2$. Ainsi la phrase :

«Tout nombre est égal à lui-même»

devient :

$$\forall x p^2xx$$

Et la phrase :

«L'addition d'un nombre et de zéro redonne ce nombre.»

donne, si dans l'interprétation, on associe la constante $a$ à 0 :

$$\forall x p^2 x f^2 x a$$

La phrase :

«Tout nombre peut s'exprimer comme la somme (modulo trois) de deux autres nombres.»

s'écrit :

$$\forall x \exists y z p^2 x f^2 y z$$