Paradoxe des jumeaux de Langevin

Christophe Roland

1 Introduction

Dans ce document, je vais tenter d'exposer une résolution du «paradoxe» des jumeaux de Langevin, qui est assez peu mise en avant. Je vais utiliser le plus possible une approche purement géométrique, qui évite de faire référence à un référentiel particulier. Je vais aussi tenter de fournir des explications les plus simples possibles, un niveau élémentaire en mathématique est tout à fait suffisant. La dernière section sera une exception à cette règle, où l'on généralisera de façon plus rigoureuse ; mais elle n'est en aucun cas obligatoire, aussi vous pouvez tout à fait l'ignorer.

2 Rappel du paradoxe

Rappelons brièvement en quoi consiste le paradoxe. On suppose qu'on a au départ des jumeaux sur Terre, qui ont donc bien sûr le même âge. À un certain moment, l'un d'entre eux part pour un voyage à bord d'un vaisseau spatial à très grande vitesse, proche de la vitesse de la lumière. Il se déplace en ligne droite, puis au bout d'un certain temps effectue un demi-tour et revient sur Terre à la même vitesse qu'il est parti. La relativité nous dit alors que lorsqu'il va rencontrer de nouveau son frère jumeau, il sera plus jeune que lui.

En effet, la relativité nous dit que le temps est relatif, si $\Delta\tau$ est le temps total du trajet du point de vue du jumeau voyageur, Δt ce même temps du point de vue du jumeau resté sur Terre, et v la vitesse du vaisseau par rapport à la Terre, on a :

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

où c est la vitesse de la lumière. On a bien $\Delta\tau < \Delta t$ car $0 < \frac{v^2}{c^2} < 1$. Le problème est le suivant : pourquoi, si tout les référentiels inertiels (en mouvements rectilignes uniformes) sont à mettre sur un pied d'égalité, c'est le jumeau qui voyage dans le vaisseau qui vieillit plus lentement et pas l'autre ? Dit autrement, pourquoi ne peut-on pas considérer la Terre en mouvement par rapport au vaisseau immobile ?

Bien sûr, la réponse classique est de dire que la différence vient du fait que le vaisseau fait demi-tour et pas la Terre. Ceci est vrai, mais il faut évidemment élaborer et justifier cette façon de voir.

3 Rappel de géométrie euclidienne

Considérons, dans l'espace à trois dimensions, un segment de droite joignant deux points X_1 et X_2. La longueur de ce segment peut être calculé en fonction des coordonnées (dans un repère cartésien) des points X_1 et X_2, que l'on va noter respectivement (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), et est donnée par :

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Cette longueur est bien sûr la même quel que soit le repère cartésien utilisé. Nous allons pour plus de simplicité, poser $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ et $\Delta z = z_2 - z_1$, et pour ne pas traîner une racine carré, parler plutôt du carré de la longueur :

$$L^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

De tout les trajets possibles reliant les points X_1 et X_2, c'est bien sûr le segment de droite le plus court.

4 Géométrie de l'espace-temps de Minkowski

La relativité nous dit que nous pouvons faire des raisonnements géométriques dans l'espace-temps. Qu'est ce qu'un segment de droite dans l'espace temps ? C'est une trajectoire particulière reliant un point-événement X_1 et un autre point-événement X_2, dont on va noter les coordonnées respectives (par rapport à un référentiel inertiel muni d'un repère cartésien) (ct_1, x_1, y_1, z_1) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) [1]. Supposons qu'un objet physique puisse aller de X_1 à X_2 (i.e. sans devoir dépasser la vitesse de la lumière). Alors, le segment de droite dans l'espace-temps reliant X_1 à X_2 correspond à la trajectoire d'un mobile allant de X_1 à X_2 et se déplaçant à vitesse constante et en mouvement rectiligne.

Quelle est (l'équivalent de) la «longueur au carré» de ce segment ? Nous allons la noter symboliquement $(\Delta\tau)^2$, la relativité nous dit alors que :

$$(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]$$

avec des notations évidentes. Notez la similitude avec le cas de la géométrie euclidienne, et aussi la différence très importante : on n'a pas le même signe pour la composante temporelle et pour les composantes spatiales. Notez aussi que $(\Delta\tau)^2$ est bien positif : en effet on doit avoir :

$$v^2 = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2} \leq c^2$$

car on ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière [2], donc on a $(c\Delta t)^2 \geq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. $(\Delta\tau)^2$ est relié à une quantité physique bien précise. Dans le référentiel du mobile (qui est inertiel puisque le mobile est en mouvement rectiligne uniforme), on a $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Dans ce référentiel, on a alors simplement $\Delta\tau = \Delta t$.

Ce temps, qui est celui donné par une horloge au repos par rapport au mobile, est appelé le *temps propre* de l'observateur lié au mobile. Comme $(\Delta\tau)^2$ doit être le même quel que soit le référentiel dans le lequel on le calcule (comme la longueur d'un segment est la même pour tout les repère en géométrie euclidienne), on doit avoir, pour tout les référentiels :

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{c^2} = (\Delta t)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2}\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2}\right]$$

on retrouve alors la première équation que nous avons écrite :

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

car on a $v^2 = \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}{(\Delta t)^2}$ qui est la vitesse au carré du mobile par rapport au référentiel considéré.

1. On multiplie la composante temporelle par la vitesse de la lumière c pour n'avoir que des unités de distance.
2. Notez que l'on peut donner une définition générale de «distance au carré dans l'espace-temps», qui fonctionne pour des points-événements tellement éloignés qu'un objet physique ne peut pas passer de l'un à l'autre, mais on peut alors avoir des valeurs négatives pour cette «distance au carré».

5 Résolution du «paradoxe»

Supposons que le point-événement X_1 correspond à «la fusée du jumeaux voyageur décolle», et que le point-événement X_2 correspond à «la fusée du jumeaux voyageur atterrit». Dans ce cas, en supposant que la Terre est en mouvement rectiligne uniforme (ce qui est approximativement vrai), la trajectoire dans l'espace-temps du jumeau resté sur Terre est un segment de droite dans l'espace-temps.

C'est maintenant que cela devient intéressant. Quel est la trajectoire la plus courte dans l'espace-temps entre X_1 et X_2 ? On va tout simplement dire que la «trajectoire la plus courte» est celle pour laquelle on a le $\Delta\tau$ le plus petit. C'est la trajectoire pour laquelle le temps mesuré par un observateur qui suit cette trajectoire est le plus court.

Mais attention !! On n'a pas définit la notion de longueur d'une trajectoire quelconque, seulement celle d'un «segment». Mais ce n'est pas grave car on peut décomposer ces trajectoires courbes en un nombre infini de segments de droites infiniment petits.

Intuitivement, la distance la plus courte doit correspondre au segment de droite (mouvement rectiligne uniforme) comme dans l'espace euclidien. Or, on va montrer qu'il n'en est rien : de toute les trajectoires physiquement possibles, c'est le mouvement rectiligne uniforme qui est le plus *long* !!

On va supposer que le jumeau voyageur a une vitesse constante tout au long du chemin aller, et a la même vitesse sur le chemin du retour. Le temps de demi-tour est supposé négligeable. On va noter $\Delta\tau_1$ le temps entre le départ et l'arrivée de la fusée pour le jumeau resté sur Terre (c'est la «longueur» de son chemin dans l'espace-temps), et $\Delta\tau_2$ le même temps du point de vue du voyageur. Plaçons-nous dans le référentiel du jumeau resté sur Terre, on a simplement, comme on l'a vu :

$$\Delta\tau_1 = \Delta t$$

Calculons $\Delta\tau_2$ dans ce même référentiel, et plaçons l'axe x dans l'axe du mouvement du vaisseau spatial (on a donc $\Delta y = \Delta z = 0$). Par symétrie entre le voyage aller et le voyage retour, il fait son demi-tour un temps $\frac{\Delta t}{2}$ après son départ (toujours du point de vue du jumeau resté sur Terre) et disons qu'il fait son demi-tour à une distance Δx de la Terre. Pour trouver la longueur totale de son trajet dans l'espace-temps, on additionne la longueur de deux segments de droite : le segment de «longueur» $\Delta\tau_{2(1)}$ qui relie le point-événement X_1 (départ de la fusée) au point-événement qu'on va appeler X_3 (demi-tour), et celui de «longueur» $\Delta\tau_{2(2)}$ qui relie point-événement X_3 au point-événement X_2. Mais on a bien sûr $\Delta\tau_{2(1)} = \Delta\tau_{2(2)}$, en effet, on a par symétrie entre l'aller et le retour :

$$\Delta\tau_{2(1)} = \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}} = \Delta\tau_{2(2)}$$

On a donc pour le trajet total :

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_{2(1)} + \Delta\tau_{2(2)} = 2\sqrt{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}} = \sqrt{(\Delta t)^2 - 4\frac{(\Delta x)^2}{c^2}} \leq \Delta t = \Delta\tau_1$$

Et donc on a bien :

$$\Delta\tau_2 \leq \Delta\tau_1$$

Notez que le jumeau voyageur va a une vitesse de $v = \frac{\Delta x}{(\Delta t/2)} = 2\frac{\Delta x}{\Delta t}$ et donc :

$$\Delta\tau_2 = \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta t)^2}\frac{(2\Delta x)^2}{c^2}} = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2\frac{v^2}{c^2}} = \Delta\tau_1\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Peut-être n'êtes vous pas encore convaincu car vous vous dites que l'on pourrait faire le même calcul du point de vue du voyageur et obtenir $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ce qui mènerait à une contradiction. Plus précisément, notons $\Delta t_{f(a)}$ et $\Delta t_{f(r)}$, le temps écoulé pour la fusée pendant l'aller et le retour respectivement, et de même $\Delta t_{t(a)}$ et $\Delta t_{t(r)}$ les même temps pour la Terre. Si on applique (incorrectement...) la formule de «dilatation du temps», on a :

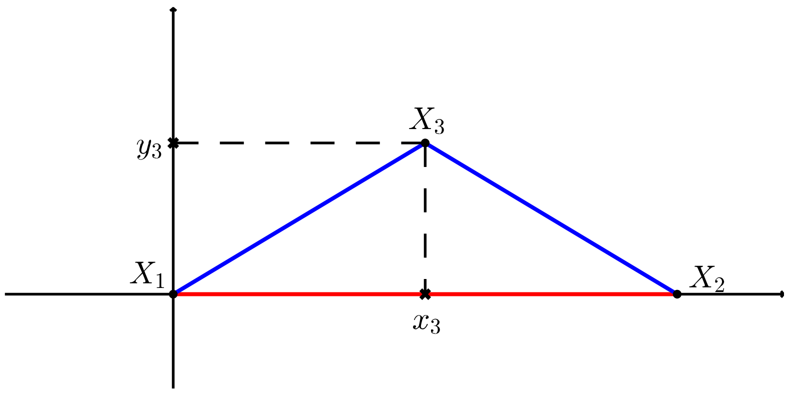
$$\Delta\tau_2 = \Delta t_{f(a)} + \Delta t_{f(r)} = \frac{\Delta t_{t(a)}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\Delta t_{t(r)}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

car $\Delta\tau_1 = \Delta t_{t(a)} + \Delta t_{t(r)}$.

Pour répondre à cette objection, on va faire une analogie avec la géométrie euclidienne. L'avantage est que tout le monde comprend facilement la géométrie euclidienne, et certains raisonnements sont tout à faits analogues.

5.1 Retour à la géométrie euclidienne

Considérons deux point X_1 et X_2 dans l'espace à (pour simplifier les dessins) deux dimensions, plus un autre point X_3 non aligné avec X_1 et X_2. Considérons alors deux trajet possibles entre X_1 et X_2 : un segment de droite joignant directement ces deux points (en rouge sur la figure), et un trajet composé d'un segment joignant X_1 à X_3 et d'un autre joignant X_3 à X_2 (en bleu).



On va utiliser le repère cartésien où l'on aligne l'axe x avec les points X_1 et X_2. Alors la longueur du trajet rouge est donnée par :

$$L_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \Delta x = x_2 - x_1 = x_2$$

car $y_2 = y_1 = 0$ et $x_1 = 0$. Pour le trajet bleu, on décompose comme on l'a fait pour le jumeau voyageur en espace-temps de Minkowski :

$$L_2 = L_{2(1)} + L_{2(2)} = 2\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-x_1)^2} = 2\sqrt{x_3^2 + y_3^2}$$

utilisons maintenant le fait que l'on a $x_3 = \frac{x_2}{2}$:

$$L_2 = 2\sqrt{\frac{x_2^2}{4} + y_3^2} = \sqrt{x_2^2 + 4y_3^2} \geq x_2 = L_1$$

On a bien que le chemin le plus court entre les deux points est le segment de droite : $L_1 \leq L_2$. Notons maintenant θ l'angle entre le segment $[X_1, X_2]$ et le segment $[X_1, X_3]$, on a :

$$\tan\theta = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_3}{(x_2/2)} = 2\frac{y_3}{L_1}$$

et donc :

$$L_2 = \sqrt{x_2^2 + 4y_3^2} = \sqrt{L_1^2 + \frac{L_1^2}{L_1^2}4y_3^2} = \sqrt{L_1^2 + L_1^2\tan^2(\theta)} = L_1\sqrt{1+\tan^2(\theta)}$$

Notez alors la similitude avec le cas des jumeaux de Langevin, si on fait la correspondance :

$$\tan^2(\theta) \longleftrightarrow -\frac{v^2}{c^2}$$

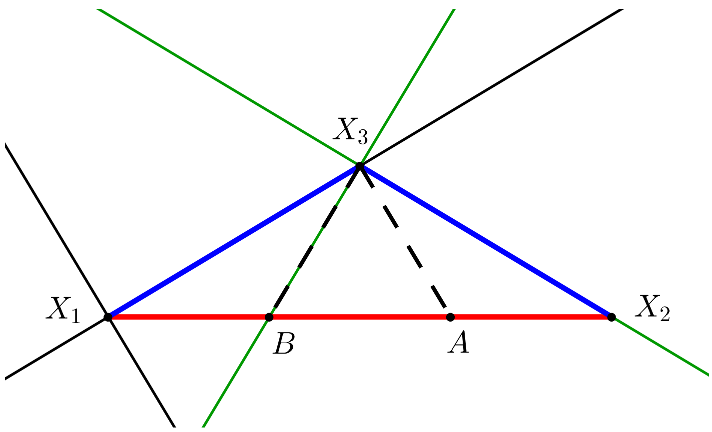
Le calcul précédent n'est d'ailleurs fait que pour montrer les analogies dans les calculs entre l'espace euclidien et l'espace minkowskien, car on aurait pu trouver ce résultat bien plus vite en notant que l'on a :

$$\cos\theta = \frac{L_1/2}{L_2/2} = \frac{L_1}{L_2}$$

ce qui revient au même que le résultat écrit précédemment puisque $1+\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$.

Maintenant, quel est l'équivalent de «utiliser le référentiel du jumeau voyageur» dans ce cas là ? Il est bien absurde de penser ici que la situation est symétrique, et que dans un autre point de vue, on aurait le chemin bleu plus court que le chemin rouge. Utiliser le référentiel du jumeau voyageur (comme si il était inertiel) reviendrait, comme on le voit ici géométriquement, à vouloir aligner un axe avec une trajectoire qui n'est pas droite. Cela n'a pas de sens. Ceci est vrai autant en géométrique euclidienne que minkowskienne.

Autre objection possible. On utilise d'abord le référentiel correspondant au voyage aller, puis on change de référentiel pour utiliser celui du voyage retour. Cette façon de voir ne marche pas non plus.



Sur le schéma ci-dessus, on attache d'abord un repère (axes noirs) au «trajet aller» (c'est à dire que l'on aligne l'axe x avec le segment qui relie X_1 à X_2) et de même on utilise un autre repère en vert («trajet retour»). On va convenir de mettre un prime sur les coordonnées correspondantes au repère vert. On a alors la longueur totale du trajet bleu :

$$L_2 = \sqrt{(x_3-x_1)^2} + \sqrt{(x_2'-x_3')^2} = x_3 + x_2' = 2x_3$$

car par symétrie, $x_3 = x_2'$.

Voici maintenant l'analogue du raisonnement incorrect sur les jumeaux de Langevin. Je veux calculer combien de temps s'écoule sur mon vaisseau sur le trajet aller, par rapport au temps écoulé sur Terre. Dans notre analogie euclidienne, ceci devient : quel est la longueur du trajet parcouru sur le segment rouge, pendant que l'on parcourt le premier segment bleu (segment $[X_1, X_3]$) ? Cette longueur est celle du segment $[X_1, A]$, qui est :

$$\sqrt{(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

le même raisonnement pour le «chemin du retour», donnerait la longueur du segment $[B, X_2]$:

$$\sqrt{(x'_2 - x'_B)^2 + (y'_2 - y'_B)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_B)^2 + y'^2_B}$$

Et c'est ici que vient l'analogue de la grosse erreur de raisonnement dans l'objection donnée sur les jumeaux de Langevin : la longueur totale du segment $[X_1, X_2]$ n'est PAS égale à la somme de la longueur du segment $[X_1, A]$ et du segment $[B, X_2]$! !

Qu'obtiendrait-on si on faisait quand même l'erreur ? Notons encore θ l'angle entre le segment $[X_1, A]$ et le segment $[X_1, X_3]$. On a alors :

$$\cos(\theta) = \frac{L_{[X_1,X_3]}}{L_{[X_1,A]}}$$

soit :

$$L_{[X_1,X_3]} = \cos(\theta) L_{[X_1,A]} = \frac{L_{[X_1,A]}}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}}$$

Si on suppose alors (incorrectement) que $L_1 = L_{[X_1,A]} + L_{[B,X_2]}$, alors on a :

$$L_2 = 2L_{[X_1,X_3]} = \frac{L_1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}}$$

ce qui en identifiant de nouveau $\tan^2(\theta)$ à $-\frac{v^2}{c^2}$, correspond à :

$$\Delta\tau_2 = \frac{\Delta\tau_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

qui était la formule (fausse) obtenue en raisonnant de façon incorrecte sur les jumeaux de Langevin. Travailler en espace euclidien plutôt qu'en espace de Minkowski nous a permit de bien nous rendre compte que ce raisonnement est tout à fait incorrect.

5.2 Résumé de l'argument

Notre argument tient en deux points :

1. Dans l'espace de Minkowski, la ligne droite est le chemin le plus *long* entre deux points.
2. La trajectoire dans l'espace-temps du jumeau resté sur Terre est (approximativement) une ligne droite, tandis que celle du jumeau voyageur ne l'est pas. Ceci est bien sûr indépendant du point de vue (référentiel) adopté.

5.3 Quelques précisions

Cette dernière section est réservé aux personnes possédant un bagage mathématique et physique un peu plus avancé. On peut montrer de façon générale que le jumeau resté sur Terre est plus vieux que l'autre lors des retrouvailles et ce *quel que soit le mouvement du jumeau voyageur.* On a en effet (en utilisant le référentiel du jumeau sur Terre) :

$$d\tau_2 = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

et donc :

$$\Delta\tau_2 = \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} dt \leq \int dt = \Delta\tau_1$$

c'est aussi simple que cela.

Justifions maintenant la correspondance :

$$\tan^2(\theta) \longleftrightarrow -\frac{v^2}{c^2}$$

Pour cela, notons que l'on a, si on choisit comme signature de la métrique $(-,+,+,+)$:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

L'idée est de faire ce qu'on appelle une *rotation de Wick*. Cela consiste à poser : $\tau = it$, on a alors[3] :

$$ds^2 = c^2d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ce qui est une métrique euclidienne. L'idée est donc de faire les calculs dans cet espace euclidien, puis de refaire la transformation inverse : $t = -i\tau$. Supposons alors un mouvement unidimensionnel : $dy = dz = 0$. Alors, dans un graphique portant x en fonction de $c\tau$, un mouvement rectiligne uniforme donne une droite faisant un angle θ avec l'axe x, tel que :

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta x}{c\Delta\tau} = \frac{\Delta x}{ic\Delta t} = -i\frac{v}{c}$$

et on a bien : $\tan^2(\theta) = -\frac{v^2}{c^2}$.

3. ici τ n'a évidemment rien à voir avec le temps propre.