

FreeSciences

Christophe Roland

26 février 2017

Table des matières

1	La science	7
1.1	Qu'est ce que la science ?	7
1.1.1	Introduction	7
1.1.2	La science : l'aspect «ensemble de connaissances»	8
1.1.3	La science : aspect «ensemble de méthodes»	9
1.2	La notion de théorie scientifique	9
1.2.1	Introduction	9
1.2.2	Remarque sur le terme «scientifique»	10
1.3	L'inductivisme	11
1.3.1	Idée générale	11
1.3.2	Critique de l'inductivisme	12
1.4	Le réfutationnisme	13
1.4.1	Introduction : critique de l'inductivisme	13
1.4.2	La réfutabilité	14
1.4.3	Le critère de démarcation vue comme une définition	14
1.4.4	Notion de confiance dans une théorie	14
1.4.5	Exemple : théories freudiennes et relativité	15
1.4.6	Exemple : la théorie de l'atome	15
1.5	Le rasoir d'Occam	16
1.5.1	Énoncé	16
1.5.2	Exemple célèbre : l'éther	16
1.6	La notion de «science exacte»	16
1.6.1	Définition	17
1.6.2	Science exacte ?	17
1.6.3	Le problème	17
1.7	La mathématisation des sciences	18
1.7.1	L'attrait pour la rigueur mathématique	18
2	Logique	19
2.1	Qu'est ce que la logique ?	19
2.1.1	Définition	19
2.1.2	La notion de vérité	19
2.1.3	Le paradoxe du menteur	20

2.2	Notion naïve d'ensemble	21
2.2.1	Introduction	21
2.2.2	Concepts et notations	21
2.3	Le langage formel	21
2.3.1	Langage formel et langage naturel	22
2.3.2	Définir la notion de langage	22
2.3.3	Construisons un exemple	23
2.4	Introduction au calcul des propositions	23
2.4.1	Introduction	23
2.4.2	Connecteurs logiques	24
2.4.3	Langages propositionnelles	27
2.4.4	Valuation	28
2.5	Tautologies	29
2.5.1	Définition	29
2.5.2	Tautologies remarquables	29
2.6	Calcul des prédicats	31
2.6.1	Motivations	31
2.6.2	Quantificateurs existentiels et universels	32
2.6.3	Alphabet et syntaxe	32
2.6.4	Énoncés des langages prédictifs	33
2.7	Introduction à la théorie des modèles	34
2.7.1	Motivations	34
2.7.2	Notion de modèle	35
3	Théorie des ensembles	38
3.1	Une branche fondamentale	38
3.1.1	Introduction - paradoxe de Galilée	38
3.1.2	La crise des fondements	39
3.1.3	Quelques remarques sur les axiomes ZFC	40
3.2	Axiome d'extensionnalité	40
3.2.1	Idée générale de l'axiome	40
3.2.2	Énoncé de l'axiome	40
3.2.3	Écriture formelle	40
3.3	Axiome de la réunion	41
3.3.1	Idée générale de l'axiome	41
3.3.2	Énoncé de l'axiome	41
3.3.3	Écriture formelle	41
3.4	Axiome de l'ensemble des parties	43
3.4.1	Idée générale de l'axiome	43
3.4.2	Notion de sous-ensemble	43
3.4.3	Énoncé de l'axiome	43
3.4.4	Écriture formelle	44
3.5	Schéma d'axiomes de remplacement	44

3.5.1	Idée générale de l'axiome	44
3.5.2	Les relations fonctionnelles	44
3.5.3	Énoncé de l'axiome	45
3.5.4	Écriture formelle	45
3.5.5	Conséquences	46
3.6	Axiome de l'infini	48
3.6.1	Idée générale de l'axiome	48
3.6.2	Union de deux ensembles	48
3.6.3	Ensemble ayant un élément quelconque	48
3.6.4	Énoncé de l'axiome	48
3.6.5	Écriture formelle	49
3.6.6	Conséquences	49
3.7	Axiome de fondation	49
3.7.1	Idée générale de l'axiome	49
3.7.2	Intersection	50
3.7.3	Énoncé de l'axiome	50
3.7.4	Écriture formelle	50
3.8	Éléments, sous-ensembles	50
3.8.1	Élément d'un ensemble	50
3.8.2	Inclusion	50
3.8.3	Propriétés	51
3.9	Définir un ensemble	51
3.9.1	Définition en extension	51
3.9.2	Définition en compréhension	52
3.10	Union et intersection	52
3.10.1	Union	52
3.10.2	Intersection	53
3.10.3	Distributivité	53
3.11	Relations binaires	54
3.11.1	Notion de couple	54
3.11.2	Produit cartésien	54
3.11.3	Relations binaires	55
3.12	Différents types de relations	56
3.12.1	Fonction	56
3.12.2	Application	56
3.12.3	Injection	56
3.12.4	Surjection	56
3.12.5	Bijection	56
3.12.6	Loi de composition interne	57

4	Nombres	58
4.1	L'ensemble des naturels	58
4.1.1	Introduction	58
4.1.2	Définir l'ensemble des naturels	59
4.1.3	Notion de successeur	59
4.2	Relation d'ordre	60
4.2.1	Définition	60
4.2.2	Ordre totale et partiel	61
4.3	Principe de récurrence	61
4.3.1	Idée générale du principe de récurrence	61
4.3.2	Écriture formelle du principe	61
4.3.3	Démonstration	62
4.4	L'addition	62
4.4.1	Définition	62
4.5	La multiplication	64
4.5.1	Définition	64
5	Algèbre linéaire	66
5.1	Espaces vectoriels	66
5.1.1	Notion intuitive de vecteur	66
5.1.2	Définition	69
5.2	Bases et dimension d'un espace vectoriel	70
5.2.1	Combinaisons linéaires	70
5.2.2	Sous-espace vectoriel	71
5.2.3	Base	72
5.3	Produit scalaire et espace dual	74
5.3.1	Introduction	74
5.3.2	Définition	75
5.3.3	Espace dual	76
6	Trigonométrie	79
6.1	Introduction	79
6.1.1	Le sinus d'un angle	79
6.1.2	Introduction au concept de radian	80
6.2	Fonctions trigonométriques	81
6.2.1	Fonction sinus	81
6.2.2	Fonction cosinus	83
6.2.3	Fonction tangente	84
7	Analyse	86
7.1	Introduction	86
7.1.1	Les paradoxes de Zénon d'Elée	86
7.1.2	Qu'est ce que l'analyse ?	87
7.2	Intervalles dans l'ensemble des réels	87

7.2.1	Définition	87
7.2.2	Propriétés	88
7.3	Achille et la tortue	88
7.3.1	Énoncé	88
7.3.2	Résolution du paradoxe : première approche	89
7.4	Suites numériques	90
7.4.1	Définissons la notion de suite	90
7.4.2	Introduction au concept de limite	91
7.5	Fonctions numériques	93
7.5.1	Introduction	93
7.5.2	Fonctions continues	94
7.5.3	Limites de fonction	96
7.6	Fonctions dérivées	98
7.6.1	Introduction	98
7.6.2	Le nombre dérivé	98
7.6.3	Fonction dérivée	102
7.7	Formules de dérivation	103
7.7.1	Dérivée d'une somme	103
7.7.2	Dérivée d'un produit	103
7.7.3	Dérivée d'un quotient	104
7.7.4	Dérivée d'une fonction composée	105
7.8	Dérivées usuelles	105
7.9	Théorème des valeurs intermédiaires	108
7.9.1	Introduction	108
7.9.2	Énoncé	109
7.9.3	Démonstration	109
7.9.4	Analyse et conséquences	109
7.10	Théorème de Rolle	110
7.10.1	Introduction	110
7.10.2	Énoncé	110
7.10.3	Démonstration	111
7.11	Théorème des accroissements finis	111
7.11.1	Introduction	111
7.11.2	Énoncé	112
7.11.3	Démonstration	112
7.12	Théorème du sandwich	112
7.12.1	Énoncé	112
7.12.2	Introduction	113
7.12.3	Démonstration	113
7.13	Calcul intégral	114
7.13.1	Comment calculer la surface d'un disque ?	114
7.13.2	Somme de Riemann	116
7.14	Théorème des accroissements finis (forme intégrale)	117

7.14.1	Introduction	117
7.14.2	Énoncé	118
7.14.3	Démonstration	118
7.14.4	Cas particuliers	118
7.15	Théorèmes fondamentaux de l'analyse	119
7.15.1	Introduction	119
7.15.2	Premier théorème fondamental de l'analyse	120
7.15.3	Deuxième théorème fondamental de l'analyse	121
8	Mécanique newtonienne	123
8.1	Qu'est ce que la mécanique newtonienne ??	123
8.1.1	Définition	123
8.2	Cinématique	123
8.2.1	Notion de référentiel	123
8.2.2	Notion de trajectoire	124
8.2.3	Vitesse	125
8.2.4	Accélération	126
8.2.5	Mouvements simples	126
8.3	Relativité de Galilée	127
8.3.1	Idée générale	127
8.3.2	Transformations de Galilée	128
8.3.3	Loi d'addition des vitesses	129
8.4	Dynamique : notions de bases	131
8.4.1	Introduction	131
8.4.2	Quantité de mouvement	131
8.5	Première loi de Newton : principe d'inertie	132
8.5.1	Idée générale	132
8.5.2	Énoncé du principe	133
8.5.3	Quelques remarques :	133
8.6	Deuxième loi de Newton : loi fondamentale de la dynamique	133
8.6.1	Idée générale	133
8.6.2	Énoncé	134
8.7	Troisième loi de Newton : loi de l'action et de la réaction	134
8.7.1	Énoncé	134
8.7.2	Quelques remarques	134
8.8	Conservation de la quantité de mouvement	135
9	Electromagnétisme	137
9.1	Introduction	137
9.2	Notions de bases	137
9.2.1	Les phénomènes électrostatiques	137
9.2.2	Loi de Coulomb	139
9.2.3	Structure de la matière	140
9.2.4	Le champs électrique	141

Chapitre 1

La science

1.1 Qu'est ce que la science ?

1.1.1 Introduction

Depuis que l'Homme est apparu sur terre, il tente de comprendre le monde qui l'entoure. C'est un réflexe naturel, qui vient dès l'enfance : tous les enfants posent des questions de nature scientifiques : pourquoi le ciel est bleu, qu'est ce c'est que la foudre, comment fonctionne un aimant, . . . Ces questions, la plupart d'entre nous ne se les posent plus ou moins souvent : la vie nous donne d'autre préoccupations. Mais la curiosité ne disparaît pas complètement et la science est un produit direct de la curiosité humaine.

On peut insister sur ce dernier point. Dans une société comme la notre où la science peut coûter cher, se pose parfois la question de son utilité. Après tout, pourquoi dépenser des millions dans (par exemple) une expérience de physique des particules alors que l'on pourrait dépenser cet argent pour résoudre des problèmes plus urgents.

Une réponse classique à cette interrogation est la suivante : la science (même et y compris la recherche fondamentale) aboutit toujours à des évolutions (voire des révolutions) technologiques, évolutions qui ont un impact souvent très direct sur le quotidien. L'histoire des sciences montre à quel point cet argument est fort. Mais ce n'est pas la motivation des scientifiques qui font de la recherche : il ne se préoccupent même pas de savoir si des applications pratiques de leurs travaux seront un jour possible. C'est bien la curiosité qui est le moteur de la science, tout le reste n'est finalement que du bonus.

La science se construit depuis des siècles, voire pourrait-on dire des millénaires. Le terme de «science» vient du latin «*scientia*» qui signifie «connaissance» : ainsi est-il a priori raisonnable de penser la science comme un simple ensemble de connaissances. Mais il existe un autre aspect qu'il ne faut pas négliger : en même temps que l'Homme a accumulé des connaissances scientifiques, il a perfectionné petit à petit les *méthodes* qui lui permettent d'accumuler ces connaissances. Ainsi, nous dirons que le mot «science» désigne en fait à la fois un ensemble de connaissance et un ensemble de méthodes de recherche.

Dans ce chapitre, nous allons donc discuter plus en détails de ce qu'est la science

et quels sont ses principes fondamentaux. Nous allons nous interroger sur la nature même de la science, c'est à dire que nous allons faire de la *philosophie des sciences*. Elle nous permettra de fournir une définition relativement précise de ce qu'est la science, de distinguer ce qui est scientifique de ce qui ne l'est pas. Comme on analyse ce qu'est la science, on se situe en quelque sorte sur un autre plan : ce chapitre n'est pas un chapitre scientifique (on ne fait pas de science) mais en quelque sorte «méta-scientifique»

1.1.2 La science : l'aspect «ensemble de connaissances»

C'est le premier aspect du mot «science», le sens le plus commun. Il est cependant imprécis car seule une partie du savoir humain est de nature scientifique. Préciser cette définition revient à résoudre un problème de démarcation : qu'est ce qui différencie un savoir de nature scientifique d'un savoir qui ne l'est pas ?

On peut déjà donner une première définition un peu naïve. Nous avons l'habitude de classer les différentes disciplines simplement en fonction de leurs objets d'étude. Ainsi, on a tendance à ranger dans ce qui scientifique des choses comme la physique, la biologie et la chimie, simplement parce que ces disciplines étudient des phénomènes naturels (au sens large).

C'est bien mais il reste des problèmes : par exemple, que faire des mathématiques ? Est-ce que les mathématiques sont une science ? L'usage veut que l'on considère effectivement les mathématiques comme une science. Mais pour marquer la différence avec les disciplines comme la physique ou la biologie, on range ces dernières dans la catégorie des *sciences naturelles*, et on place les mathématiques dans la catégorie des *sciences formelles*, aux côtés de l'informatique théorique.

Existe t-il une troisième catégorie ? Oui, c'est la catégorie des *sciences humaines et sociales*. Dans cette dernière catégorie, on trouvera des disciplines comme l'histoire, la psychologie, ou encore l'anthropologie.

On peut ainsi proposer une première définition du mot «science» :

Définition 1. *La science désigne l'ensemble des disciplines suivantes :*

1. *les sciences formelles,*
2. *les sciences naturelles,*
3. *les sciences humaines et sociales.*

Mais bien sûr, il faut définir (au moins intuitivement) ces différentes disciplines :

Définition 2. *Les sciences formelles étudient des constructions théoriques abstraites, en utilisant des techniques rigoureuses et formelles de déductions.*

Bien sûr, il s'agit là d'une définition quelque peu vague et non-rigoureuse, l'essentiel étant d'en avoir une intuition. L'idée est que ces sciences n'étudient que des constructions purement théoriques, dans lesquels on construit uniquement des objets abstraits. Bien que parfois très abstraites, ces constructions théoriques sont souvent motivées par des applications concrètes. Ainsi, beaucoup de développement en mathématiques sont motivés

par des problèmes en physique. Mais il faut bien se rendre compte que ce n'est pas systématiquement le cas : il est d'ailleurs tout à fait possible que des recherches en mathématiques ne trouvent jamais d'applications concrètes. Mais ce n'est pas un problème car ce n'est pas là notre motivation principale, ce que nous voulons avant tout c'est satisfaire notre curiosité naturelle.

Définition 3. *Les sciences naturelles étudient le monde naturel, c'est-à-dire à la fois les objets qui le compose et les lois qui le gouverne.*

L'exemple le plus direct est bien sûr la physique. C'est elle qui fournit la base aux autres sciences naturelles car elle étudie les lois *fondamentales* de la nature. C'est à partir des lois de la physique que l'on peut déduire toutes les principes de la chimie, et par la chimie toutes les connaissances de la biologie.

Définition 4. *Les sciences humaines et sociales étudient différents de l'humain, comme son comportement et ses interactions sociales.*

Les sciences humaines et sociales forment un ensemble extrêmement vaste de connaissance. Elle concerne tout ce qui touche au comportement humain tant au niveau individuel (comme la psychologie) qu'au niveau collectif (comme l'anthropologie et la sociologie). Certaines de ces sciences sont directement motivées pour des applications concrètes comme par exemple l'économie.

1.1.3 La science : aspect «ensemble de méthodes»

Nous allons maintenant discuter des méthodes de recherche scientifiques. Préciser quelles sont ces méthodes pourraient nous donner une définition plus simple et plus générales des connaissances scientifiques, car elle pourra se reformuler tout simplement en : «l'ensemble des connaissances acquises par des méthodes scientifiques».

Dans la suite, nous allons essayer de trouver comment définir à la fois les méthodes et les connaissances scientifiques. Ce que nous voulons c'est fournir des critères clairs et simples qui nous permettent facilement de faire la distinction entre ce qui est scientifique et ce qui ne l'est pas. Cela nous permettra de remplacer notre définition actuelle de la science en tant que liste de disciplines : nous pourrons alors répondre à des questions comme : est-ce que l'astrologie est une science ? Et l'homéopathie ? Il est bien connu que ce genre de question fait débat. Mais ce qui fait débat n'est pas toujours l'objet d'étude mais bien souvent uniquement les méthodes de raisonnement. Voilà pourquoi nous ne pouvons pas en rester là et nous devons continuer notre réflexion.

1.2 La notion de théorie scientifique

1.2.1 Introduction

La notion de *théorie* est centrale en science. Comprendre exactement ce que l'on entend par «théorie scientifique» n'est pas quelque chose de trivial et a fait l'objet de nombreuses discussions parmi les philosophes et les scientifiques.

Le grand public ne comprend souvent pas très bien cette notion, et n'en a en fait qu'une idée très vague. L'illustration la plus flagrante est donnée par la théorie de synthétique de l'évolution, en effet ses détracteurs l'accusent souvent de «n'être qu'une théorie». Ceci montre une confusion (souvent volontaire) entre la notion de théorie scientifique et la notion de théorie telle qu'on la conçoit dans le langage courant. En effet, dans le langage courant, on parle de théorie pour indiquer une explication dont la véracité est très hypothétique, et donc non confirmée. Ce n'est pas cela une théorie scientifique.

Une théorie scientifique doit se baser sur un certain nombre d'hypothèses. C'est une chose absolument incontournable pour pouvoir produire quelque de solide et cohérent : on doit se reposer sur un certain nombre de principes fondamentaux, que ne remet jamais en cause au sein de la théorie. Si l'un de ces principes est remis en cause de façon certaine, par exemple par l'expérience, alors il faut rejeter ce principe, et par suite toute la théorie. En physique principalement, on appelle ces principes des *postulats*.

Une fois que l'on a posé ces postulats, une série de déductions peuvent être faites. On utilise assez souvent le terme de «théorème» pour désigner ces résultats de manière générale. Ces théorèmes demandent donc une *démonstration* : on doit démontrer que si les postulats sont vrais, les théorèmes sont vrais également. D'une certaine manière, on peut dire que la vérité des théorèmes n'est pas établie malgré leur démonstration, en effet ils ne sont vrais que sous l'hypothèse que les postulats sont bons.

On comprend donc qu'il est judicieux de parler de *vérification* pour une théorie : c'est très intéressant d'établir une théorie, mais tant qu'aucune autre expérience ne vient confirmer la validité de cette théorie, rien ne nous permet d'être véritablement confiant envers notre théorie, elle reste hypothétique. La notion de vérification d'une théorie sera développée en détail plus loin.

Nous sommes donc près à définir la notion de théorie :

Définition 5. *Une théorie scientifique est un ensemble constitué :*

1. *d'une série de postulats qui sont les points de départ de la théorie,*
2. *d'une série de résultats énoncé parfois sous forme de formules ou de théorèmes.*

Le mot théorème est surtout utilisé en mathématique et parfois en physique. En physique, beaucoup de résultats importants sont simplement des équations, (exemple : l'«équation de Schrödinger»), on utilise aussi le terme de loi.

1.2.2 Remarque sur le terme «scientifique»

Il est important de noter que toute théorie scientifique doit pouvoir être validée par l'expérience. C'est une évidence, mais il faut un petit peu réfléchir pour bien comprendre ce que l'on entend par là. La confrontation à l'expérience est essentielle pour passer du stade de simple spéculation, au stade de théorie reconnue et solide. C'est donc un point très important à préciser.

C'est sur l'adjectif «scientifique» que nous allons nous concentrer dans la suite. Qu'est ce que cela veut dire que quelque chose est scientifique ? En particulier qu'est ce que cela veut dire qu'une théorie est scientifique ? Est-ce que ça existe une théorie non-scientifique ?

Il est intéressant de noter un paradoxe dans la perception de la science dans le grand public. Alors qu'à la fois la science est élevée au rang de juge suprême (qui n'a jamais entendu comme argument que telle chose est prouvée scientifiquement ?) elle est parfois considérée comme dogmatique (exemple du GIEC) ou essentiellement impuissante (le fameux «la science ne peut pas tout expliquer» appliqué à tort et à travers). Ainsi, la science est à la fois reçue avec enthousiasme et avec méfiance. C'est probablement le meilleur argument pour dire qu'il est important d'expliquer ce qu'est la science.

1.3 L'inductivisme

1.3.1 Idée générale

La méthode la plus élémentaire de recherche scientifique (et d'une certaine manière la plus primitive) repose sur l'induction. Il s'agit de savoir comment trouver une loi générale à partir d'un nombre limité d'observations.

L'idée centrale repose sur deux concepts essentiels : l'expérience précède la théorie, et il faut faire une généralisation à partir d'un ensemble fini d'observations. La science se compose en effet de lois générales, mais une expérience n'est jamais qu'un cas particuliers. Extraire une loi générale à partir d'un ensemble de cas particuliers est un problème délicat, aussi on s'impose les contraintes suivantes :

- Faire un grand nombre d'expériences. Si une expérience réussit trois fois, on peut penser qu'on a eu de la chance d'être dans des conditions particulières. Si elle réussit cent fois, c'est déjà moins probable et la confiance en l'expérience est accrue.
- Varier les conditions expérimentale. Ceci permet d'éliminer les facteurs qui n'entrent pas en jeu. Si on fait une expérience dans lequel on utilise un certain matériaux, et que l'on pense que sa nature n'influence pas le résultat, il convient d'essayer avec un autre matériaux pour le vérifier.
- Aucune observation ne doit contredire la loi : c'est une évidence, un seul contre-exemple suffit à invalider une loi générale.

Par exemple, Galilée a effectué plusieurs expériences sur la chute des corps. Plusieurs fois, il laissa rouler des objets sur un plan incliné et repéra le temps écoulé à intervalles réguliers. Il répéta ces expériences, avec différents objets de différentes masses, et en tira une loi générale : la distance parcourue par un objet en chute libre, sans vitesse initiale, est proportionnelle au carré du temps écoulé depuis le lâcher. En particulier, elle ne dépend pas de la masse de l'objet.

Ce procédé s'appelle *induction* et il est important de ne pas la confondre avec la notion de déduction. En effet, dans une déduction, la conclusion est vraie de manière certaine si les prémisses sont vraies, ce n'est pas le cas dans le cadre de l'induction, où la conclusion est seulement probablement vraie mais ce n'est pas assurée.

C'est le problème que nous allons aborder tout de suite.

1.3.2 Critique de l'inductivisme

Le mathématicien et philosophe Bertrand Russell dit à propos de ce problème :

« Une dinde arrive dans une ferme, est nourrie tous les jours à 9h. En bonne inductiviste elle recueille un grand nombre de données (jour, climat,...) pour établir une conclusion quant à l'heure des repas des dindes. Elle finit par conclure qu'elle est toujours nourrie à 9h du matin,... jusqu'à la veille de Noël où on lui tranche le cou. »

C'est le problème fondamental : l'induction ne permet pas de tirer une conclusion certaine. Le même problème se pose pour la chute des corps, par exemple on pourrait imaginer qu'au delà d'une certaine masse, la loi énoncée par Galilée n'est plus vraie. Ou peut-être n'est-elle vraie en moyenne qu'une fois sur un million. On peut ainsi imaginer des tas de choses, éventuellement très farfelues, le point principal étant que la loi n'est absolument pas prouvée : on peut en effet en imaginer d'autres, pourtant tout aussi compatibles avec l'observation.

Paradoxe de Goodman

Un exemple intéressant est donnée par le philosophe et logicien Nelson Goodman en 1946. On introduit un nouvel adjectif : «vleu» qui veut dire :

«vert jusqu'en 2050, puis bleu ensuite»

Observer des émeraudes vertes donne par induction : «toutes les émeraudes sont vertes», mais peut très aussi donner : «toutes les émeraudes sont vleues». Le paradoxe est dans le fait qu'on considère toujours comme vraie la première affirmation mais jamais la seconde, alors qu'il n'y a pas de raison logique formelle pour cela.

La raison, d'après Goodman et Hume, se trouve dans «l'habitude». Nous voyons toujours des émeraudes verte, et nous n'observons jamais de changement, alors que la couleur «vleu» suppose une transformation brutale. Ainsi, on fait l'hypothèse implicite de la régularité : les lois de la physique ne changent pas au cours du temps, et on ne peut donc pas présupposer une propriété avec ce genre de référence temporelle. De même, on pourrait s'interdire d'avoir une référence spatiale (c'est à dire : les lois de la physiques sont les mêmes partout).

Il est toutefois important de remarquer que ce genre de supposition trouvent elles mêmes leur origine dans un raisonnement inductif. En fait, Hume considère que cette notion d'habitude trouve sa source dans la psychologie humaine, bien que Hume ne s'interdise pas de l'utiliser dans un cadre scientifique.

Une pétition de principe ?

Un argument possible en faveur de l'induction, est de constater que généralement cette méthode de raisonnement fonctionne bien. Mais si on y regarde de plus près, ceci nous fait entrer dans un cercle vicieux.

En effet, affirmer que le raisonnement inductif fonctionne parce que jusqu'ici il a toujours bien fonctionné est en soi en raisonnement inductif! On a donc une pétition de

principe, c'est à dire que l'on suppose (au moins implicitement) ce que l'on veut prouver et c'est bien évidemment un raisonnement fallacieux.

Inductivisme sophistiqué

Pour répondre à toutes ces objections, les inductivistes ont tentés d'améliorer la situation en s'écartant d'une idée trop naïve de l'induction. Ainsi on peut parler d'«inductivisme sophistiqué», mais ce terme peut s'appliquer à différents systèmes de pensée inductiviste ; il ne faut donc pas voir derrière ce terme un courant de pensée homogène et objectivement identifiable.

En effet, l'histoire des sciences montre que de nouvelles idées ne viennent pas toujours d'un raisonnement purement inductif. Elles peuvent venir d'arguments purement théoriques ou d'une bonne intuition. Elles peuvent aussi être motivées par des données empiriques, mais les raisonnements entre les données et la conclusion ne sont pas forcément de nature inductive.

Claude Bernard, un médecin du dix-neuvième siècle, était un partisan de l'inductivisme. Il a créé la méthode OHERIC : Observation, Hypothèse, Expérience, Résultats, Interprétation, Conclusion ; qui modélise la démarche scientifique. Il s'agit déjà d'un inductivisme sophistiqué, mais l'observation reste la source première du raisonnement. Ainsi, Claude Bernard refusait l'idée que l'on puisse un jour déterminer la composition des étoiles, car il rejetait tout ce qui était inaccessible à l'observation directe.

Nous savons cependant de nos jours beaucoup de choses sur la composition des étoiles. Il faut donc accepter que l'idée de départ ne soit pas forcément issue d'un raisonnement inductif. Toutefois, puisque l'on se place dans le cadre d'un inductivisme sophistiqué, l'induction n'est pas supprimée mais simplement déplacée. Elle n'est plus forcément la méthode utilisée pour trouver la loi, mais pour la confirmer.

Même si l'induction est déplacée au rang de méthode de vérification et non plus de méthode de recherche, il reste que comme nous l'avons vu, cette vérification est incertaine. Ceci ne répond donc pas totalement aux critiques.

1.4 Le réfutationnisme

1.4.1 Introduction : critique de l'inductivisme

Karl Raimund Popper était un philosophe des sciences qui a vécu pendant le vingtième siècle. Il pensait qu'un problème majeur de la philosophie des sciences est de pouvoir distinguer ce qui est scientifique de ce qui ne l'est pas. Il va ainsi sévèrement critiquer l'inductivisme.

Pour Popper, on peut faire autant d'expérience que l'on veut qui vont dans le sens de la théorie, ce n'est pas suffisant pour avoir vraiment confiance en elle. Au lieu de parler de vérification, Popper parle de «corroboration» pour les observations qui vont dans le sens de la théorie.

Il propose donc d'abandonner l'induction comme méthode scientifique. Et il va moins s'intéresser aux méthodes de recherches scientifiques qu'à trouver un critère de

démarcation discriminant les théories scientifiques des théories non-scientifiques.

1.4.2 La réfutabilité

Popper considère alors que pour qu'une théorie soit scientifique, elle doit être *réfutable*. Qu'est ce que cela veut dire ?

Imaginons une théorie non-réfutable c'est à dire qu'on ne peut jamais prouver qu'elle est fausse. Par exemple, je vais dire : il existe autour de nous des tas de lutins invisibles qui nous observent. Cette théorie est irréfutable, en effet vous ne pourrez jamais prouver que cette théorie est fausse.

Prenons maintenant une théorie réfutable : la relativité générale. Elle a fait un grand nombre de prédictions qui ont été mis à l'épreuve. Par exemple, elle prévoyait que la trajectoire des rayons lumineux soit courbée dans un champs de gravitation (comme a proximité du Soleil) suivant un angle deux fois plus grand que celui prédit par la théorie newtonienne. Cette prédiction a été mise à l'épreuve dès 1919 à l'occasion d'une éclipse totale.

Pour qu'une théorie soit réfutable, elle doit donc faire des prédictions pour pouvoir la mettre à l'épreuve. Si la théorie prédit quelque chose qui a déjà été observé ce n'est suffisant (ce n'est qu'une «postdiction») car aucune expérience ne permet de réfuter cette théorie.

1.4.3 Le critère de démarcation vue comme une définition

Le critère de réfutabilité peut être utilisé pour définir l'adjectif «scientifique» très simplement :

Une théorie est scientifique si elle est réfutable

Ainsi, on sort quelque peu du débat de savoir si le critère de démarcation est juste : il l'est pas définition. Bien sûr, c'est un peu facile car il faut encore être en accord avec l'acceptation généralement admise du terme «scientifique» ainsi qu'avec l'histoire des sciences.

Cela marche assez bien mais il faut ici attirer l'attention sur une faute à ne pas faire. Il ne faut pas voir la réfutabilité comme ayant quelque rapport avec la démarche scientifique. Ainsi, quand on confronte l'histoire des sciences avec cette définition, il ne faut pas chercher à savoir si le chercheur avait ce genre d'idée en tête ou pas ; c'est une fois la théorie faite que l'on peut dire : cette théorie est scientifique (ou ne l'est pas). En effet, les expériences ne sont pratiquement jamais faites pour réfuter mais confirmer ou collecter des données afin de construire une nouvelle théorie. C'est pourquoi le réfutationnisme n'est en rien une base pour comprendre la méthode scientifique.

1.4.4 Notion de confiance dans une théorie

Il faut maintenant préciser cette notion de réfutabilité par rapport à la vraisemblance d'une théorie. C'est à dire, quel est le lien entre le fait qu'une théorie soit scientifique (au

sens de Popper) et qu'elle décrive correctement la réalité ?

Il est parfaitement possible d'avoir une théorie scientifique fautive, tout comme il est possible d'avoir une théorie non-scientifique correcte. Le critère de Popper n'est pas une garantie absolue de la vérité d'une théorie. Elle permet cependant d'augmenter notre confiance en elle.

Ainsi, si je dis qu'un petit nounours vert est quelque part caché sous la surface de Pluton, comme personne n'a les moyens d'aller vérifier, personne ne pourra jamais me prouver que j'ai tort, la théorie est donc non-scientifique au sens de Popper. Il est raisonnable d'être sceptique par rapport à cette affirmation, des théories de ce genre on peut en imaginer des centaines, étant hors de portée de toute réfutation, on est obligé de rester dans le doute.

Mais si je dis que les horloges vont tourner plus vite dans un champ de gravitation plus faible et que je peux même chiffrer la différence, je prend beaucoup de risque en disant cela car on peut vérifier cela autant de fois que l'on veut avec différentes expériences éventuellement très précises. Si malgré cela personne n'aura prouvé que j'avais tort, ma théorie est passée à l'épreuve du feu : elle s'en sort renforcée, car même en laissant la possibilité de la critiquer, elle est restée indemne.

1.4.5 Exemple : théories freudiennes et relativité

Popper donne comme exemple les théories de Freud en psychanalyse et la théorie de la relativité d'Albert Einstein :

1. pour Popper, le gros problème des théories de Freud est qu'elles sont irréfutables donc non-scientifiques. Par exemple, Freud explique beaucoup de choses en faisant appel à l'inconscient mais les mécanismes de l'inconscient ne se prêtent guère à l'expérience. Popper qualifie la psychanalyse de pseudo-science au même titre par exemple que l'astrologie ou l'homéopathie. Il est à noter qu'il n'est pas le seul à avoir critiqué la psychanalyse et encore aujourd'hui le statut de cette discipline fait débat même si il est généralement admis par les scientifiques et les philosophes des sciences que la psychanalyse n'est pas une science.
2. Dans le cas de la théorie de la relativité, comme on s'y attend, Popper la considère comme une théorie scientifique. La relativité a fait des tonnes de prédictions dont la majeure partie a été confirmée par l'expérience.

1.4.6 Exemple : la théorie de l'atome

Beaucoup de gens le savent : la notion d'atome est très ancienne et remonte à l'Antiquité. C'est le philosophe Démocrite qui est à l'origine de cette notion dans une doctrine appelée l'atomisme.

Aujourd'hui, nous savons tous que Démocrite avait (partiellement) raison. Mais il reste que sa théorie n'était certainement pas scientifique. En effet, dans le contexte de la Grèce antique, cette affirmation n'était pas réfutable donc non-scientifique. Le fait que son intuition était bonne ne change rien à ce fait.

La théorie de l'atome redevient d'actualité avec John Dalton au début du XIXe siècle. Cette théorie devient scientifique et l'existence des atomes fut confirmée expérimentalement.

En conclusion, une théorie peut être scientifique ou non selon les moyens d'expérimentation dont on dispose. Il est toutefois hasardeux d'émettre des théories en espérant que l'on puisse un jour les confirmer car on a dû attendre plus de deux mille ans avant que la théorie atomique passe de simple spéculation à théorie scientifique.

1.5 Le rasoir d'Occam

Le rasoir d'Occam est un des principes fondamentaux de la science. C'est tout simplement un outil qui permet de choisir entre deux théories pour savoir laquelle est préférable, la plus «probable».

1.5.1 Énoncé

L'idée est de toujours choisir la théorie la plus simple et celle qui introduit le moins d'hypothèses entre deux théories concurrentes. Il suffit de faire attention au fait de ne mettre en concurrence que des théories réfutables. Par exemple si on a une théorie qui dit que les orages sont produits par le dieu Thor lorsqu'il est en colère, c'est assurément une théorie plus simple qu'une théorie météorologique complexe sur la formation des orages, mais étant une théorie non réfutable, c'est une théorie non scientifique.

1.5.2 Exemple célèbre : l'éther

Au début du vingtième siècle, on pensait que l'espace était rempli d'une substance appelée «éther» dans laquelle se propageaient les ondes électromagnétiques. Il y avait à ce moment plusieurs expériences qui tentaient de mettre en évidence ce fameux éther qui paraissait incontournable du fait de l'incompatibilité entre l'électromagnétisme et la relativité de Galilée.

Après la célèbre expérience de Michelson et Morley, plusieurs physiciens dont Poincaré et Lorentz tentèrent d'expliquer ses résultats. Leurs théories s'apparentent à la théorie de la relativité mais il reste encore la notion d'éther.

Einstein remarqua ensuite qu'il était possible d'abandonner tout simplement la notion d'éther si on abandonne l'idée d'un temps et d'un espace absolu. Sa théorie ne contenait pas la notion d'éther, elle est donc plus simple et demande moins d'hypothèses que la théorie de Poincaré : il est donc légitime de la choisir.

1.6 La notion de «science exacte»

Nous savons qu'il existe plusieurs domaines scientifiques : la physique, la biologie, la sociologie, ... On peut classer ces différentes sciences de plusieurs manières. Un tel classement est naturel : certaines sciences ont des liens étroits avec d'autres, ce qui nous amène à les mettre dans un même groupe. Nous allons discuter ici d'une classification

assez connue : le classement des sciences en sciences *exactes* et *inexactes* (on dit aussi sciences «dures» et sciences «molles»).

Nous allons d'abord donner une définition du terme «science exacte» pour ensuite l'analyser.

1.6.1 Définition

Définition 6. *Les sciences exactes regroupent :*

1. les sciences de la nature : *chimie, physique, biologie, astronomie, ...*
2. les sciences formelles : *mathématique, informatique, géométrie, logique, ...*

Le terme de «science exacte» s'oppose aux *sciences humaines* et aux *sciences sociales*. Mais il reste une question : quelle est la raison de cette distinction entre sciences exactes et «inexactes» ?

1.6.2 Science exacte ?

Il faut d'abord faire attention au fait qu'on peut très bien travailler sur des sciences humaines et en même temps faire preuve de rigueur. En effet, le terme «inexact» est trompeur : on a l'impression que cela sous entend une sorte de manque de sérieux ou de rigueur. Les raisons de cette distinction sont en réalité tout autres.

D'une part, on peut dire que les sciences exactes sont plus précises. En effet, dans les sciences exactes on peut avoir des résultats chiffrés et avoir des théories ne contenant aucune ambiguïtés. En psychologie par exemple, c'est très différent, les choses sont d'une certaine manière plus complexes, il est bien souvent très difficile de déterminer exactement l'origine d'un problème psychologique. On n'aura jamais une affirmation aussi précise que par exemple : «le demi-grand axe de l'orbite de la terre est de 149 597 870 km». C'est un problème en réalité insoluble pour les sciences humaines et sociales : les théorie n'auront jamais de précision «mathématique». Donner un chiffre est quelque chose de vraiment puissant, ce chiffre peut être vrai ou faux, pas autre chose. Malheureusement, c'est (en général) impossible de chiffrer quoi que ce soit dans les sciences humaines.

En effet, on peut le montrer simplement sur un exemple. Lorsque l'on étudie la schizophrénie, on se trouve face à un problème complexe. Remarquons d'abord qu'il existe plusieurs formes de schizophrénie, avec des symptômes différents. Le problème se complique encore par le fait que la schizophrénie semble avoir des causes multiples. Mais de plus, tout les schizophrènes ne sont pas également atteint, certains ont des troubles graves, d'autres auront moins de symptômes. À partir de là, il est naturel d'introduire une échelle de valeur, mais cette échelle sera toujours subjective!! Il est évidemment impossible de dire à un patient : «Vous êtes schizophrène à un degré de 3,12 sur notre échelle de valeur». D'où le qualificatif d'inexact.

1.6.3 Le problème

Cette classification peut poser problème. Dire que l'on travaille dans une science inexacte semble peu gratifiant. Ce terme est un peu péjoratif.

Il est d'ailleurs assez intéressant de constater l'énorme attrait pour les mathématiques de la part de scientifiques travaillant dans les sciences humaines et sociales. L'idée de mathématiser la sociologie peut sembler étrange mais pourtant une partie de la sociologie est mathématisée à outrance (parfois avec des relations mathématiques relativement compliquées). Il semble clair que le but est d'atteindre une plus grande précision, qui pourrait (?) être offerte par la mathématisation. Cela est-il vraiment une bonne façon de raisonner? Je pense que la question se pose et je pense que la réponse est non. Afin de mieux cerner les efforts de mathématisation des sciences inexacts, nous allons nous intéresser à cet étrange attrait pour les mathématiques.

1.7 La mathématisation des sciences

De plus en plus de sciences utilisent le formalisme mathématique. Une science en particulier l'utilise vraiment tout le temps : la physique. Il existe toute une gradation entre cette science et des sciences où les mathématiques sont absentes, certaines sciences utilisent les mathématiques de manière sporadiques.

1.7.1 L'attrait pour la rigueur mathématique

Les mathématiques ont une qualité énorme : l'absence (autant que possible!) de la moindre ambiguïté. Cela est dû au fait que les mathématiques tentent de s'échapper des raisonnements trop imprécis de la langue parlée en inventant tout simplement leur propre langage. De là vient l'expression de *langage mathématique*.

Tout le monde connaît certains aspects de ce langage. L'expression mathématique bien connue : « $2 + 2 = 4$ » par exemple, qui illustre bien l'utilisation d'un langage symbolique. Nous allons d'ailleurs plus loin reparler de cette notion de langage en mathématique. Beaucoup de symboles sont tout simplement des lettres grecques ou latines, on utilise de plus les chiffres arabes et certains symboles ont été inventés uniquement pour les mathématiques. Il est d'ailleurs ici utile de rappeler l'alphabet grec, très souvent utilisé :

alpha : α , A	êta : η , H	nu : ν , N	tau : τ , T
beta : β , B	thêta : θ , Θ	xi : ξ , Ξ	upsilon : υ , Y
gamma : γ , Γ	iota : ι , I	omicron : o , O	phi : ϕ , Φ
delta : δ , Δ	kappa : κ , K	pi : π , Π	khi : χ , X
epsilon : ϵ , E	lambda : λ , Λ	rhô : ρ , P	psi : ψ , Ψ
zêta : ζ , Z	mu : μ , M	sigma : σ , Σ	omega : ω , Ω

La première lettre de l'alphabet hébreu est aussi parfois utilisée. C'est aleph : \aleph .

Tout comme pour le langage habituel, il existe un certain nombre de règles (tout agencement de symboles mathématiques n'a pas de sens) et c'est précisément la *rigidité* de ces règles qui offre aux mathématiques toute leur rigueur. La question est donc de savoir comment, face à un phénomène naturel, on peut retranscrire ce problème en terme mathématique. Une fois le problème posé en équation, on peut profiter de toute la rigueur offerte.

Chapitre 2

Logique

2.1 Qu'est ce que la logique ?

2.1.1 Définition

Le mot «logique» vient du grecque «logos» qui signifie «parole, discours», et par extension «rationalité», la logique est donc la science de la raison. Plus précisément, c'est la science qui étudie les règles que doivent respecter tout raisonnement valide, qui permet de distinguer un raisonnement valide d'un raisonnement qui ne l'est pas.

La logique a ceci de particulier que l'on s'y intéresse aussi bien en mathématique pure qu'en philosophie. La façon d'aborder le problème est bien différente dans les deux cas. On va bien sûr dans la suite se focaliser sur la logique mathématique, mais il est bien évident qu'il n'est pas interdit de «philosopher» sur les concepts mathématiques dont nous allons discuter.

2.1.2 La notion de vérité

Discuter de la notion de vérité est extrêmement délicat. Il suffit par exemple de chercher sur internet «vérité absolue» pour trouver un grand nombre de discussions visant à la fois à chercher si il existe une vérité absolue, mais même à comprendre ce que cela veut dire exactement. Il y a dans ce genre de débat une double interrogation : est-ce qu'il existe une vérité objective (donc indépendante de la connaissance que nous avons ou non de cette vérité), et est ce qu'il est possible de l'atteindre, donc à la fois d'accéder à cette vérité, et d'être certain de bien l'avoir trouvé (on peut en effet avoir raison sans en avoir la preuve).

Nous n'allons pas ici nous attarder sur ces problèmes, qui surgissent souvent en raison d'une définition trop imprécise de l'expression «vérité absolue». Je vais juste montrer comment on peut éviter ces problèmes dans le cadre d'une première approche de la notion de vérité. On suppose qu'il existe des vérités objectives dans le sens suivant : si une vérité portant sur un système physique peut dépendre de son observation (d'une façon ou d'une autre, éventuellement tout à fait classique, il n'est sûrement pas question

ici de faire de la «métaphysique quantique» !), ou de tout autre influence extérieure, alors on peut toujours parler de vérités portant sur le système plus large :

«système physique + observateur + tout autre système physique en interaction avec le système étudié»

Notez ici l'anthropocentrisme : il n'y a a priori pas de raison de distinguer l'observateur des autres sources d'influence, en fait la seule raison de sa présence est de supprimer toute la problématique de la subjectivité de l'observateur ou de son influence sur le système. Mais en faisant cela, on «triche», car on ne peut pas, étant nous-même observateurs du monde, *établir* une vérité portant sur un système dont nous faisons partie, précisément à cause de notre subjectivité et de nos interactions avec le monde extérieur. Notons quand même en passant que si l'on ne peut donc pas en principe être certain de la véracité d'une théorie, on peut en avoir un certain niveau de confiance, comme nous l'avons discuté dans le chapitre sur la science. Il n'est donc pas question de dissocier complètement la science de la «réalité extérieure», ce serait là une position relativiste très extrême. Mais ce n'est pas important pour le sujet qui nous préoccupe, il ne s'agit pas ici de découvrir ces vérités, mais de savoir qu'elles sont là, ce qui est suffisant pour en parler.

2.1.3 Le paradoxe du menteur

Ces problèmes étant (au moins pour l'instant) mis de côtés, on va rencontrer un type de problème bien plus grave. Le problème est de savoir si la phrase suivante est vraie ou fausse :

Cette phrase est fausse.

On voit tout de suite l'impossibilité de décider si cette phrase est vraie ou fausse : si elle vraie, c'est qu'elle est fausse, et inversement ! Ce problème très connu est appelé *paradoxe du menteur*. Il existe un certain nombre de solutions proposées pour résoudre ce paradoxe, nous allons nous contenter d'exposer la solution donnée par le logicien Alfred Tarski.

L'énoncé «Cette phrase est fausse» est écrite dans un langage (ici le français) qui est *sémantiquement clos*. Un langage *sémantiquement clos* est un langage dans lequel on peut exprimer la vérité d'un énoncé écrit dans cette même langue. C'est cette «capacité» de ces langages qui permettent l'apparition de paradoxes comme le paradoxe du menteur, les pourquoi les langages *sémantiquement clos* sont dit *inconsistants*.

On peut donc éviter ce type de paradoxe par l'utilisation de *langages sémentiquement ouverts* (qui sont simplement les langages qui ne sont pas *sémantiquement clos*). Mais alors, si on ne peut exprimer la vérité d'un énoncé dans un langage *sémantiquement ouvert*, comment parler de la vérité d'un énoncé dans un tel langage ?

Pour cela, il faut utiliser un autre langage, précisément un *méta-langage*. Si on veut exprimer (définir) la notion de vérité dans un langage L , on peut le faire dans un méta-langage ML . Ce langage est lui-même *sémantiquement ouvert* (puisque c'est *requis* pour

ne pas avoir un langage inconsistant), on ne peut donc pas dans ML exprimer la vérité d'un énoncé de ML . Pour cela, il faut un autre (méta)-langage, MML , et ainsi de suite. Il apparaît donc une *hiérarchie* dans les langages, c'est ainsi que cette solution du paradoxe du menteur est appelée la *solution hiérarchique*.

2.2 Notion naïve d'ensemble

2.2.1 Introduction

Pour introduire proprement la logique, il faut, comme on vient de le voir, s'intéresser de près à la notion de langage. Nous allons devoir utiliser la notion (intuitive) d'ensemble pour cela. La notion mathématique précise d'ensemble sera définie dans le prochain chapitre qui sera consacré à ce sujet. Mais en attendant, nous n'avons pas besoin d'une notion formelle d'ensemble pour exposer les principes de la logique. Le vouloir absolument mènerait de toute façon à une impasse, car nous avons besoin de la logique pour construire la théorie des ensembles, et nous serions alors dans un cercle vicieux. Nous allons donc dans la suite utiliser la notion d'ensemble de façon restreinte, et d'une certaine façon «déconnectée» de la notion rigoureuse de théorie des ensembles que nous développerons après. On peut alors ignorer tout les paradoxes qui surgissent lorsque l'on parle d'ensemble de façon naïve, car nous utiliserons la notion d'ensemble que pour définir certains concepts précis, dit autrement *nous n'avons pas besoin* d'une théorie des ensembles formelle et «complète», c'est aussi simple que ça. Dans cette section, on ne s'occupe que de définir certaines notations que nous utiliserons lorsque l'on utilisera la notion d'ensemble.

2.2.2 Concepts et notations

Un *ensemble* est une collection non ordonnée d'«objet» que l'on appelle des *éléments* de cet ensemble. Lorsqu'un ensemble E , a comme éléments a_1, a_2, \dots, a_n , on note :

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Dire que x soit un élément d'un ensemble E s'écrit :

$$x \in E$$

Dans le cas contraire, on peut écrire :

$$x \notin E$$

2.3 Le langage formel

Nous avons vu sur l'exemple du paradoxe du menteur que la notion de langage est importante pour comprendre la notion de vérité. Nous allons donc tenter de formaliser le mieux possible cette notion.

2.3.1 Langage formel et langage naturel

Un *langage naturel* est tout simplement défini comme étant un langage utilisé dans la vie de tous les jours, comme par exemple, le français. Comme nous l'avons vu, les langages naturels sont sémantiquement clos, donc inconsistants. En plus de cet inconvénient majeur, les langages naturels ont deux inconvénients pratiques quand on les utilise en mathématique :

1. la complexité des phrases qui rend les choses plus compliquées, il faut parfois plusieurs lignes et une phrase complètement incompréhensible, pour dire quelque chose qui peut se résumer par une expression mathématique bien plus simple et courte,
2. le fait que les ambiguïtés du langage courant peuvent conduire à des erreurs de raisonnement.

Ces inconvénients nous poussent à définir des langages ayant des règles très strictes tout en étant le plus facile à lire possible, ce sont des *langages formels*. Bien on demandera à ces langages formels d'être des langages sémantiquement ouverts.

2.3.2 Définir la notion de langage

En faisant l'analogie avec les langages naturels, on voit qu'un langage se compose de deux éléments différents. D'une part, nous avons un *alphabet* propre à un langage. Que se soit pour les langages formels ou naturels, le concept d'alphabet est identique, à savoir qu'un alphabet est tout simplement un ensemble de symboles que nous allons utiliser pour construire les *mots* du langage. Un mot est simplement une suite ordonnée de symboles de l'alphabet.

On peut construire n'importe quel mot en inventant une suite quelconque de lettres de l'alphabet, mais tous les mots possibles ne font pas partie du langage. Par exemple, l'expression «hgjhytjh» est bien une suite des lettres de l'alphabet latin, mais ne fait pas partie de la langue française. Il faut au langage un autre élément, qu'on appelle une *syntaxe*, qui est un ensemble de règles qui définissent quels mots appartiennent au langage.

Nous pouvons donc définir de façon précise la notion de langage formel, par une série de définitions :

Définition 7. *Un alphabet est un ensemble non vide d'éléments appelés symboles.*

Définition 8. *Un mot d'un alphabet est une suite ordonnée et finie de symboles de l'alphabet.*

Définition 9. *Soit un alphabet, un ensemble fini de mots de l'alphabet est appelé un langage formel.*

Ainsi, un langage formel est un sous-ensemble de l'ensemble des mots de l'alphabet. Si on se donne une série de règles auxquelles obéissent les mots du langage et seulement ceux-ci, ces règles sont appelées la *syntaxe* du langage.

2.3.3 Construisons un exemple

On peut donner un exemple pour y voir plus clair et définir un langage formel simple : on va prendre un alphabet et une syntaxe quelconque, ne voyez aucune logique particulière dans le choix que l'on va faire.

L'alphabet du langage est l'ensemble contenant les éléments suivants : $A, B, C, +, =$. Et la syntaxe sera composée des règles suivantes :

1. aucun mot du langage ne peut commencer ou terminer par $=$,
2. aucun mot du langage ne peut commencer ou terminer par $+$,
3. dans un mot du langage, on a un et un seul symbole « $=$ »,
4. dans un mot du langage, un symbole sur deux est une lettre.

On a donc défini un langage formel simple. Les mots de ce langage ressemblent à des équations mathématiques, par exemple, $A + B + C = A + C$ est un mot possible. En effet, le premier et le dernier symbole ne sont ni « $=$ » ni « $+$ », on a un seul symbole « $=$ », et un symbole sur deux est bien une lettre.

On se rend compte aussi que certains agencement de symboles ne sont pas des mots du langage : par exemple, $= + A + + BC$ ne l'est pas.

2.4 Introduction au calcul des propositions

2.4.1 Introduction

Nous allons maintenant introduire une classe de langages particuliers, que l'on va appeler *langages propositionnels*. Les mots de ces langages seront appelés des *énoncés*, parce que nous voulons pouvoir dire que ces «mots» sont vrais ou faux. Les mots des langages propositionnels seront aussi appelés *formules*. Nous verrons plus tard d'autres langages où l'on fera une distinction entre mots du langage, formules et énoncés.

Nous pouvons commencer par introduire un type particulier d'énoncés : les *proposition*. Ces propositions sont aussi appelées *formules atomiques* (atomique au sens de «insécable»), c'est à dire que ce sont des formules qui ne sont pas construits à partir d'autres formules.

Dans les langages propositionnels, on note les propositions par un simple symbole, généralement avec une lettre minuscule. De combien de symboles avons-nous besoin ? Il n'y a pas de réponse à cette question dans le sens que l'on définit ici une classe de langages et non un langage en particulier, aussi on peut autoriser un nombre de symboles différents suivant les langages. Il en faut toutefois au moins un (sans quoi il n'y aurait aucun mot dans le langage, à part le mot vide qui ne contient aucun symbole), mais on peut en avoir autant que l'on veut, même une infinité. On conviendra d'utiliser les lettres : p, q, r, s, \dots comme symboles propositionnels, éventuellement, on peut rajouter un indice si on manque de lettres et utiliser $p_1, q_1, \dots, p_2, q_2, \dots$ (notez qu'une écriture comme p_1 est considéré comme *un seul* symbole).

Si on s'arrête ici, on aura des langages parfaitement inutiles. L'idée est de construire des formules à partir des symboles propositionnels et d'autres symboles, qu'il reste à

définir, que l'on appellera des *connecteurs logiques*. Comme leur nom l'indique, ils vont «connecter» les formules atomiques de façon à construire des *formules composées*, qui seront donc des formules avec plus d'un symbole. On peut s'attendre à ce que l'on puisse les utiliser de la même façon pour «connecter» des formules atomiques et des formules composées. Ainsi, on pourra définir, étant donné un certain connecteur logique et un certain nombre d'énoncés (de formules), comment on peut construire une formule qui les combine, sans se préoccuper de savoir si les formules que l'on combine sont atomiques ou non.

Pour représenter symboliquement cette construction, un problème se pose. On voudrait disposer de symboles qui puissent représenter *n'importe quel* énoncé, pour définir proprement la syntaxe des langages propositionnels. On conviendra alors de noter les énoncés par des lettres majuscules A, B, C, \dots , mais ici il faut bien comprendre que ces symboles *ne font pas partie des langages propositionnels!!* Ils servent à définir plus facilement la syntaxe de tels langages, on peut dire que ces symboles font partie d'un *méta-langage*.

Il faudra aussi définir proprement la *sémantique* de ces langages, c'est à dire se poser la question de la signification des énoncés. On peut déjà dire qu'à chaque proposition correspond une *valeur de vérité* : soit vrai soit faux. Anticipant un peu sur la suite, on peut déjà donner des principes qui seront valables pour n'importe quel énoncé :

1. principe de bivalence : les deux seules valeurs de vérité possible sont le vrai et le faux,
2. principe du tiers-exclu : à *tout* énoncé on associe soit le vrai, soit le faux, aucun énoncé est dépourvu de valeur de vérité,
3. principe de non-contradiction : aucun énoncé ne avoir plus d'une valeur de vérité, un énoncé ne peut donc être à la fois vrai et faux.

On a alors la définition suivante :

Définition 10. *Soit L un langage propositionnel. Une L -assignation est une relation qui à chaque formule atomique de L associe une et une seule valeur de vérité, soit V (vrai), soit F (faux).*

2.4.2 Connecteurs logiques

Prenons un exemple. Considérons deux énoncés A et B . On peut imaginer que de A on peut déduire B , c'est à dire que si A est vrai, alors B est vrai lui aussi. On écrit alors : «si A alors B ». Mais on a alors que la phrase «si A alors B » peut être vraie ou fautive.

On peut faire un raisonnement intuitif en associant à A et B des énoncés du langage naturel. Si A veut dire «ceci est un cobra» et B veut dire «ceci est un serpent», alors «si A alors B » veut dire «si ceci est un cobra alors ceci est un serpent» ce qui est vrai. Mais on peut imaginer que A veuille dire «ceci est un tigre» et alors «si A alors B » devient faux.

On comprend alors que lorsque l'on combine des énoncés de cette manière, on obtient des énoncés qui ont aussi une valeur de vérité, et que cette valeur de vérité dépend des valeurs de vérités des énoncés A et B .

Les mots «si» et «alors» sont des connecteurs logiques (en fait il n'en forment qu'un puisqu'on les utilise ensembles). Nous allons maintenant en voir d'autres et représenter chaque connecteur par un symbole différent.

Le connecteur «non» (négation)

C'est le connecteur le plus simple de tous. Considérons une proposition A . La proposition «non A » est vraie si A est faux, et fautive si A est vraie. Ce connecteur s'écrit symboliquement \neg .

On peut illustrer cela dans un tableau que l'on appelle «table de vérité» :

A	$\neg A$
V	F
F	V

Ce type de tableau est simple et nous l'utiliserons encore beaucoup.

Le connecteur «ou» (disjonction)

Ce connecteur permet de former des énoncés comme « A ou B » mais il faut faire attention que si A et B sont tous les deux vrais alors « A ou B » est vrai aussi (c'est juste une convention, ne vous casses pas la tête à savoir pourquoi!). C'est pourquoi on précise parfois «ou inclusif» (par opposition au «ou exclusif» souvent utilisé en langage courant). Ce connecteur s'écrit \vee .

On peut tout comme avec le connecteur «non», résumer tout cela par une table de vérité :

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se souvenir de cette table est très facile : On a simplement que $A \vee B$ est faux si A et B sont tous les deux faux, vrai dans tous les autres cas.

Le connecteur «et» (conjonction)

Ce connecteur permet de former des énoncés comme « A et B ». Sa signification est exactement la même que celle du mot «et» français : « A et B » n'est vrai que si A et B sont tous les deux vrais. Il est représenté par le symbole \wedge .

Sa table de vérité est la suivante :

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Le connecteur «si... alors» (conditionnel matériel ou implication)

Il est représenté par le symbole : \Rightarrow .

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

«si A alors B » veut dire tout simplement que si A est vrai, B l'est nécessairement aussi.

Mais la table de vérité peut surprendre. Pourquoi les deux «V» au bas de la colonne de droite? Ici pour comprendre, considérons chaque cas un à un.

Premier cas : le vrai implique le vrai. C'est assez logique : par définition de l'implication, si A est vrai, B est vrai aussi. Deuxième cas : le vrai n'implique pas le faux!! Logique encore une fois : à partir d'une proposition vraie, on ne pourra jamais en déduire une proposition fausse.

Donnez une valeur de vérité à $A \Rightarrow B$ quand A est faux est plus délicat. Commençons par le cas où B est vrai. On voit dans la table de vérité que $A \Rightarrow B$ est vrai. Cela veut dire qu'à partir d'une proposition fausse, on peut très bien aboutir à une conclusion vraie. Cela peut paraître étrange mais nous allons donner un exemple.

Supposons donc que A veuille dire : « $2 + 2 = 5$ » (proposition fausse donc). On peut en déduire facilement une proposition vraie : il suffit de multiplier chaque cotés de l'égalité par zéro. On a donc $0 \cdot (2 + 2) = 0 \cdot 5$ ce qui donne $0 = 0$ c'est à dire une proposition vraie! Le faux implique donc le vrai.

Enfin, montrer que le faux implique le faux est très facile. en effet de « $2 + 2 = 5$ » on peut déduire directement que... « $2 + 2 = 5$ »!!

Le connecteur «est équivalent à»

Le connecteur «équivalence» s'écrit symboliquement : \Leftrightarrow et veut dire : «à la la même valeur de vérité que».

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

D'autres connecteurs

Ces connecteurs ne sont pas ou peu utilisés en mathématique, mais plutôt en électronique et en informatique. Comme on les utilise surtout en informatique, on utilise le «1» à la place du «V» et le «0» à la place du «F».

Ces connecteurs sont aussi appelés des «portes logiques». La porte NOT est le «non» logique, la porte AND est le «et» et la porte OR est le «ou». On trouve aussi la porte NOR (NOT OR) :

A	B	A NOR B
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La porte XOR (ou exclusif) :

A	B	A XOR B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La porte NAND (NOT AND) :

A	B	A NAND B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

2.4.3 Langages propositionnelles

Il est maintenant facile de donner l'alphabet et la syntaxe des langages propositionnels : L'alphabet d'un langage de logique propositionnelle est constitué :

1. d'un ensemble éventuellement infini de symboles propositionnels : p, q, r, s, \dots ,
2. des symboles : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
3. des séparateurs (parenthèses) : «(» et «)».

Les parenthèses sont utiles dans les énoncés logiques car il faut se rendre compte par exemple qu'un énoncé de la forme $\neg A \vee B$ n'est pas équivalent à un énoncé de la forme $\neg(A \vee B)$.

On peut ensuite définir la syntaxe :

Syntaxe : l'ensemble des formules d'un langage propositionnel est le plus petit ensemble tel que :

- si A est un symbole propositionnel alors A est une formule,
- si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule,
- si A et B sont des formules, alors $(A \vee B)$ est une formule,
- si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$ est une formule,

- si A et B sont des formules, alors $(A \Rightarrow B)$ est une formule,
- si A et B sont des formules, alors $(A \Leftrightarrow B)$ est une formule.

Petite remarque : pourquoi dit-on dans la définition : «le plus petit ensemble»? L'explication est simple. Si on avait la même définition mais sans préciser cela, on ne saurait pas par exemple, si la formule $A \vee \wedge B$ est valide ou pas. En effet, la définition n'implique pas que cette formule existe, mais ne l'interdit pas non plus. C'est pour cela que l'on précise «le plus petit ensemble», sinon la définition ne serait pas correcte.

2.4.4 Valuation

Étant donné un langage propositionnel L et une L -assignation, on peut attribuer une valeur de vérité à chaque formule atomique. Mais alors, on peut assigner une valeur de vérité aux formules composées grâce aux tables de vérité, à la L -assignation correspond donc une L -valuation qui fait fait à *tout* les énoncés une valeur de vérité. On va maintenant énoncer un théorème qui dit simplement qu'étant donnée une L -assignation, il existe une et une seule L -valuation associée. On verra alors que les tables de vérités ne sont que des conséquences de ce théorème, qui définit comment on associe une valeur de vérité à toute formule.

Théorème 1. *Soit L un langage propositionnel, à chaque L -assignation possible M correspond une et une seule relation appelée L -valuation et notée V_M , qui à chaque énoncé A fait correspondre une et une seule valeur de vérité qui ne peut être que V ou F , tel que, en notant $M(A)$ la valeur de vérité associée à la proposition A par M , et $v_M(A)$ la valeur de vérité associée à la proposition A par V_M :*

- Si A est une proposition, $v_M(A) = M(A)$.
- Si A est une formule, $v_M(\neg A) = V$ si et seulement si $v_M(A) = F$.
- Si A et B sont des formules, $v_M(A \vee B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = V$ et/ou $v_M(B) = V$.
- Si A et B sont des formules, $v_M(A \wedge B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = V$ et $v_M(B) = V$.
- Si A et B sont des formules, $v_M(A \Rightarrow B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = F$ et/ou $v_M(B) = V$.
- Si A et B sont des formules, $v_M(A \Leftrightarrow B) = V$ si et seulement si $v_M(A) = v_M(B)$.

Démonstration. Montrons d'abord que pour toute formule X , on a au moins une valuation. Si X est une proposition, on a tout simplement $v_M(X) = M(X)$. Sinon, par la syntaxe du langage, on sait que X peut s'écrire sous au moins l'une des forme suivantes : $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \Rightarrow B)$ et $(A \Leftrightarrow B)$, où A et B sont des formules. Les règles données dans le théorème nous donne alors une valeur de vérité, connaissant la valeur de vérité de A et B . Mais eux-mêmes peuvent se mettre sous au moins l'une des formes $\neg A'$, $(A' \vee B')$, $(A' \wedge B')$, $(A' \Rightarrow B')$ et $(A' \Leftrightarrow B')$, donc on peut obtenir leur valeur de vérité en fonction d'autre énoncés et ainsi de suite jusqu'à arriver à la valuation de propositions.

Montrons maintenant qu'il n'y a qu'une valuation pour chaque formule. Pour les propositions, c'est trivialement vrai. Sinon, supposons deux valuations v_M et $v_{M'}$ différentes sur certaines formules. Si pour deux formules A et B on a $v_M(A) = v_{M'}(A)$ et

$v_M(B) = v_{M'}(B)$ (et il est toujours possible d'en trouver puisque l'on peut choisir des propositions), alors on a $v_M(\neg A) = v_{M'}(\neg A)$, $v_M(A \vee B) = v_{M'}(A \vee B)$, ..., et on peut refaire le même raisonnement avec ces formules composées, et ainsi de suite. De proche en proche, on a $v_M(X) = v_{M'}(X)$ pour toute formule X .

Notons que les tables de vérités sont une *conséquence* de ce théorème, une façon schématique simple de représenter les règles qui définissent les L -valuations.

2.5 Tautologies

2.5.1 Définition

Définition 11. Une tautologie est un énoncé qui est vrai pour toute L -évaluation.

Exemples :

Un énoncé de la forme $A \Rightarrow A$ est une tautologie : que A soit vrai ou faux, cette formule est toujours vraie. On peut le démontrer avec une table de vérité.

A	$A \Rightarrow A$
V	V
F	V

Un énoncé de la forme $A \vee \neg A$ (principe du tiers exclu) est une tautologie : on peut le démontrer avec une table de vérité.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
V	F	V
F	V	V

On voit donc ici la méthode de démonstration avec une table de vérité : la dernière colonne ne contient que des «V», c'est donc que l'énoncé est forcément vrai.

2.5.2 Tautologies remarquables

Voici maintenant une liste de tautologie. Elle peuvent parfois être utiles pour simplifier un énoncé. En effet, si A et B sont des énoncés et que l'on a $A \Leftrightarrow B$, on peut remplacer A par B ou B par A .

Identité

$$A \Leftrightarrow A$$

Double négation

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A$$

Idempotence

$$A \Leftrightarrow (A \vee A)$$

$$A \Leftrightarrow (A \wedge A)$$

Commutativité

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

Associativité

$$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

Distributivité

$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

Absorption

$$(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A$$

$$(A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow A$$

Loi de De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Conditionnel matériel

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Contraposition

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Équivalence matérielle

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Exportation-importation

$$((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Pour compléter, on peut lister une série de tautologie qui ne sont pas des équivalences (c'est à dire sans le symbole \Leftrightarrow) :

Identité

$$A \Rightarrow A$$

Tiers exclu

$$A \vee \neg A$$

Loi de Peirce

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

Modus Ponens

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

Modus Tollens

$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

Modus Barbara

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

2.6 Calcul des prédicats

2.6.1 Motivations

Nous allons maintenant généraliser les langages propositionnels et définir ainsi des *langages prédicatifs*. Ceci nous permettra d'exprimer des formules correspondants à des énoncés utilisant des expressions comme «pour tout» et «il existe». Le but final est d'écrire en langage formel des raisonnements comme :

1. Tout les hommes sont mortels,
2. Socrate est un homme,
3. donc, Socrate est mortel.

Nous allons donc introduire des formules où apparaissent une ou plusieurs *variables*. Ceci nous permettra d'exprimer formellement des choses comme : « x est un nombre entier». Dans cette expression, x est une variable, et l'expression peut être vrai ou fausse suivant la valeur de x . On va aussi introduire des symboles, que l'on va appeler des *constantes*, qui seront analogues aux variables si ce n'est qu'ils ont une «valeur» fixée. Les variables et les constantes seront aussi appelés des *termes*.

Comme on généralise les langages propositionnels, on retrouve les symboles propositionnels dans les langages prédicatifs. On voudrait ensuite ajouter des analogues aux propositions, mais qui puisse dépendre d'un certain nombre n de termes, les symboles correspondants seront appelés *symboles prédicatifs d'arité n* . Puisqu'une proposition ne dépend d'aucun terme, un symbole propositionnel peut être vu comme un symbole prédicatif d'arité zéro.

On peut aussi imaginer qu'un terme puisse dépendre d'un certain nombre n d'autre terme. Pour cela, on va introduire des symboles appelés *symboles fonctionnels d'arité n* .

2.6.2 Quantificateurs existentiels et universels

Les différents connecteurs vu en logique propositionnelle restent tout à fait d'actualité. Mais pour le calcul des prédicats, nous devons introduire deux nouveaux symboles logiques : ce sont des *quantificateurs*.

Le quantificateur existentiel

Ce quantificateur signifie : «il existe» ou plus précisément : «il existe au moins un» et est noté \exists . On peut écrire :

$$\exists xA$$

Et on doit comprendre : «il existe au moins un x tel que A soit vrai».

On rencontre parfois en mathématique des expressions du type :

$$\exists!A$$

Et on doit comprendre : «il existe un et un seul x tel que A soit vrai». On ne va cependant pas utiliser cette écriture en logique.

Le quantificateur universel

Ce quantificateur signifie «quelque soit» et est noté \forall . On peut écrire :

$$\forall xA$$

Et on doit comprendre : «quelque soit x , A est vrai».

2.6.3 Alphabet et syntaxe

Le langage de la logique du premier ordre est constitué des ensembles suivants :

1. un ensemble éventuellement infini de symboles propositionnels : p, q, r, s, \dots ,
2. un ensemble éventuellement infini de symboles prédicatifs d'arité n (n est entier strictement positif) : $p^1, q^1, r^1, \dots, p^2, q^2, r^2, \dots$,
3. un ensemble éventuellement infini de symboles fonctionnels d'arité n (n est entier strictement positif) : $f^1, g^1, h^1, \dots, f^2, g^2, h^2, \dots$,
4. un ensemble infini de symboles appelés *variables* : x, y, z, \dots ,
5. un ensemble infini de symboles appelés *constantes* : a, b, c, \dots ,
6. l'ensemble des symboles logiques : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$
7. et les parenthèse : $(,)$.

Il reste à définir la syntaxe. Il faut rappeler que si pour le cas la logique des propositions on avait uniquement des formules, on a deux notions distinctes en logique des prédicats : les formules et les termes.

L'ensemble des *termes* est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que :

1. toute variable est un terme,
2. toute constante est un terme,
3. si T_1, T_2, \dots, T_n sont des termes, alors si F est un symbole fonctionnel d'arité n , $FT_1T_2\dots T_n$ est un terme.

L'ensemble des *formules* est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que :

1. toute proposition est une formule,
2. si T_1, T_2, \dots, T_n sont des termes, alors si P^n est un prédicat d'arité n , $P^nT_1T_2\dots T_n$ est une formule,
3. si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule,
4. si A et B sont des formules, alors $(A \vee B)$ est une formule,
5. si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$ est une formule,
6. si A et B sont des formules, alors $(A \Rightarrow B)$ est une formule,
7. si A et B sont des formules, alors $(A \Leftrightarrow B)$ est une formule,
8. Si A est une formule et X est une variable, $\forall X A$ est une formule,
9. Si A est une formule et X est une variable, $\exists X A$ est une formule.

2.6.4 Énoncés des langages prédicatifs

Dans les langages propositionnels, nous n'avons pas fait de distinctions entre les formules et les énoncés. Nous allons maintenant en faire une, il existera donc des formules qui ne sont pas des énoncés. On commence par définir la notion de *sous-formules* :

Définition 12. Soit A une formule, l'ensemble $S(A)$ des sous-formule de A , est le plus petit ensemble de formules tel que :

1. $A \in S(A)$,
2. si $\neg B \in S(A)$, alors $B \in S(A)$,
3. si $B \vee C \in S(A)$, alors $B \in S(A)$ et $C \in S(A)$,
4. si $B \wedge C \in S(A)$, alors $B \in S(A)$ et $C \in S(A)$,
5. si $B \Rightarrow C \in S(A)$, alors $B \in S(A)$ et $C \in S(A)$,
6. si $B \Leftrightarrow C \in S(A)$, alors $B \in S(A)$ et $C \in S(A)$,
7. si $\forall X B \in S(A)$, alors $B \in S(A)$,
8. si $\exists X B \in S(A)$, alors $B \in S(A)$.

Définition 13. Une occurrence d'une variable X dans une formule A est liée si il existe une sous-formule de A de la forme $\exists X B$ ou $\forall X B$, B étant une formule. Dans le cas contraire, elle est dite libre.

Définition 14. Un énoncé est une formule sans occurrence libre de variable.

L'intérêt de cette définition est que la valeur de vérité d'un énoncé est ainsi indépendante de toute variable. Si on remplace donc, dans un énoncé, une variable par une constante, cela n'a de sens que si il y a une occurrence libre de cette variable dans l'énoncé. On peut exprimer cette idée de façon plus générale, en remplaçant une variable par un terme dans lequel ne figure aucune variable, un tel terme sera appelé *terme clos*. Intuitivement, un terme clos est un «terme constant». On va écrire, si A est une formule (pas forcément un énoncé) et T un terme clos :

$$A[X := T]$$

la formule obtenue en remplaçant X par T dans A , si X est une constante, et la formule obtenue en remplaçant les occurrences libre de X par T dans A , si X est une variable.

2.7 Introduction à la théorie des modèles

2.7.1 Motivations

Considérons les deux énoncés suivant :

- «La Terre tourne autour du Soleil.»
- «Si il neige, il neige.»

Les deux énoncés sont vrais, mais il n'ont pas vraiment le même statut. Nous savons que le premier énoncé est vrai grâce (entre autres) aux observations astronomiques. Mais à la limite, on pourrait imaginer un univers parallèle dans lequel ce n'est pas le cas. Par contre, le deuxième énoncé est forcément vrai, c'est à dire il n'y a pas besoin de faire la moindre observation pour être sûr que c'est vrai. On peut dire que cet énoncé est vrai dans *tout les univers possibles*. On ne peut se placer dans un univers imaginaire dans lequel cet énoncé serait faux.

Comme le deuxième énoncé est vrai dans tout les mondes possibles, on va dire que cet énoncé est une *loi logique*. On peut définir cette notion de façon un peu plus précise. Au lieu de parler de «mondes possibles», nous allons parler de *modèles*. Une loi logique est donc un énoncé vrai dans tout les modèles. Si un énoncé A est vrai dans un certain modèle M (un certain monde), alors on dit que M est modèle de A , et on écrit cela symboliquement :

$$M \models A$$

Si A est une loi logique, on peut écrire :

$$\models A$$

Et il faut comprendre par cette notation que tout modèle M est modèle de A . De même que l'on a défini la notion de loi logique, il est naturel de définir la notion de *contradiction*, une contradiction est simplement un énoncé faux dans tout les modèles, et l'on peut noter :

$$\not\models A$$

Il reste à définir de façon précise la notion de modèle.

2.7.2 Notion de modèle

Nous allons énoncer une série de définitions qui va nous amener à définir rigoureusement la notion de modèle.

Définition 15. Soit U un ensemble, un n -uple de U est une suite ordonnée de n éléments de U .

Notation : si les éléments de U sont notés u_1, u_2, u_3, \dots , alors (u_1, u_2, \dots, u_n) est un n -uple de U . Un élément de U peut être vu comme un 1-uple, et un 2-uple est aussi appelé un *couple*. On va aussi convenir que l'on a :

$$(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n) = ((u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), u_n)$$

Notons donc U^n l'ensemble des n -uples de l'univers, nous avons alors la :

Définition 16. Soit U un ensemble, une relation n -aire sur U est un sous-ensemble de U^n .

On conviendra d'utiliser de façon générale le terme de relation pour désigner une relation d'arité n quelconque.

Définition 17. Soit E et F des ensembles, une fonction n -aire définie sur E et à valeur dans F , est un ensemble de couples (a, b) tel que a appartienne à E^n et b appartienne à F , et tel que pour un élément donné x de E^n , il existe au plus un élément y de F , tel que le couple (x, y) soit élément de la fonction.

On conviendra d'utiliser de façon générale le terme de fonction pour désigner une fonction d'arité n quelconque.

Définition 18. Soit E et F des ensembles, une application n -aire définie sur E et à valeur dans F , est une fonction définie sur E et à valeur dans F tel que pour tout élément x de E^n , il existe un élément y de F , tel que le couple (x, y) soit élément de la fonction.

On conviendra d'utiliser de façon générale le terme d'application pour désigner une application d'arité n quelconque.

Définition 19. Soit L un langage prédicatif, une L -structure est la donnée d'un ensemble non vide U appelé univers, d'un ensemble de relations sur U appelé prédicats, et d'un ensemble d'applications définies sur U et à valeur dans U . De plus, pour tout n , si L possède des symboles prédicatifs n -aires, il doit y avoir dans la L -structure au moins un prédicat n -aire ; de même, pour tout n , si L possède des symboles fonctionnels n -aires, il doit y avoir dans la L -structure au moins une application n -aire.

Définition 20. Soit L un langage prédicatif, U l'univers d'une L -structure, une interprétation de L associe :

1. à chaque symbole propositionnel de l'alphabet de L une et une seule valeur de vérité : T ou F ,
2. à chaque constante de l'alphabet de L un élément de U ,
3. à chaque symbole prédictif n -aire de l'alphabet de L un prédictif n -aire de la L -structure,
4. à chaque symbole fonctionnel n -aire de l'alphabet de L une application n -aire de la L -structure.

Nous arrivons enfin à la définition d'un modèle :

Définition 21. Soit L un langage prédictif, un modèle pour L est la donnée d'une L -structure et d'une interprétation de L .

Exemple. Considérons un langage prédictif très simple : aucun symbole propositionnel, seulement deux symboles prédictifs, p^1 et q^1 (d'arité 1), et aucun symbole fonctionnel. Définissons maintenant une L -structure. Comme Univers, prenons l'ensemble :

$$U = \{\text{chat, chien, pigeon, crocodile, ordinateur}\}$$

Et prenons les deux prédictifs (unaires) suivant :

$$P = \{\text{chat, chien, pigeon, crocodile}\}$$

et :

$$Q = \{\text{chat, chien}\}$$

P correspond intuitivement à «est un animal», tandis que Q correspond intuitivement à «est un mammifère». On va bien sûr choisir comme interprétation de L celle qui associe au prédictif P le symbole prédictif p^1 , et au prédictif Q le symbole prédictif q^1 . Toujours intuitivement, la phrase (ou énoncé) suivante :

«Tout les mammifère sont des animaux.»

va s'écrire :

$$\forall x(q^1x \Rightarrow p^1x)$$

Si de plus, on convient que (par exemple) l'interprétation associe la constante a à l'élément «ordinateur», alors la phrase :

«L'ordinateur n'est pas un animal.»

correspond à :

$$\neg p^1a$$

Autre exemple. Choisissons un langage prédictif sans symbole propositionnel, un symbole prédictif binaire p^2 , et un symbole fonctionnel binaire f^2 . On choisit comme Univers :

$$U = \{0, 1, 2\}$$

Et on définit un prédicat binaire :

$$P = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

et une application binaire :

$$F = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 2), (1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 2), (2, 1, 0), (2, 2, 1)\}$$

Intuitivement, P correspond à l'égalité, et F à l'addition modulo trois (c'est à dire une addition où l'on soustrait un multiple de trois si on arrive ou dépasse trois, de sorte que le résultat soit strictement inférieur à trois, ainsi $2 + 2 = 4$ devient $2 + 2 = 1 \pmod{3}$). On va dans l'interprétation associer P à p^2 et F à f^2 . Ainsi la phrase :

«Tout nombre est égal à lui-même»

devient :

$$\forall x p^2 x x$$

Et la phrase :

«L'addition d'un nombre et de zéro redonne ce nombre.»

donne, si dans l'interprétation, on associe la constante a à 0 :

$$\forall x p^2 x f^2 x a$$

La phrase :

«Tout nombre peut s'exprimer comme la somme (modulo trois) de deux autres nombres.»

s'écrit :

$$\forall x \exists y z p^2 x f^2 y z$$

Chapitre 3

Théorie des ensembles

3.1 Une branche fondamentale

3.1.1 Introduction - paradoxe de Galilée

À la fin du XIX^e siècle, un mathématicien, Georg Cantor, posa les bases de la théorie des ensembles. L'étude des ensembles en mathématique est donc relativement récente. Le développement de cette théorie a permis d'apporter certaines réponses à des questions mathématiques délicates sur l'infini.

Le problème se pose avec un énoncé qui semble très intuitif (considéré même comme un axiome) qui est le suivant : «le tout est plus grand que la partie». Cet axiome a été énoncé au départ par Euclide et semblait tellement évident que certains mathématiciens comme Leibniz ne pouvaient même pas imaginer qu'il soit mis en défaut. Pourtant, cet axiome mène à un paradoxe : *le paradoxe de Galilée*.

Ce paradoxe est simple à énoncer : «un segment de 2 cm ne contient pas plus de points qu'un segment de 1 cm». Cette fois ci on a vraiment quelque chose de contre-intuitif!! Mais si on arrive à démontrer cette assertion, on aura une contradiction avec l'axiome vu précédemment ce qui l'invaliderait. Voyons si c'est possible.

Intuitivement, on se dit que le segment de 2 cm contient deux fois plus de points que le segment de 1 cm (donc il y a plus de point). Mais le nombre de points est infini et il faut se méfier de l'intuition. Dans ce cas, comment comparer le nombre de points? On va essayer de préciser ce que l'on entend par «même nombre de points» et surtout, comment on fait pour le savoir.

C'est très simple, même intuitif. Si on a deux groupes de personnes par exemple (un groupe «A» et un groupe «B»), et que l'on veut savoir si il y a autant de personnes dans chaque groupe, un moyen possible est de ranger ces personnes par groupes de deux. Dans chacun de ces groupes de deux, on a une personne du groupe «A» et une personne du groupe «B». Si cela est possible sans qu'il reste de personne en dehors de ce groupement, alors il y a autant de personnes dans le groupe «A» que dans le groupe «B».

Appliquons cela pour les points des segments. Pour y voir plus clair, on va placer les deux segments de telle sorte qu'ils aient une extrémité en commun (que nous appeller O) et

que les segments soient superposés. Si on choisit un point quelconque sur le petit segment, il est à une certaine distance de O (distance comprise entre zéro et un centimètre). À ce point on va faire correspondre un point deux fois plus éloigné de O , on aura que cet autre point est sur le grand segment. On peut faire correspondre à chaque point sur le petit segment un point sur le grand segment et inversement. On a donc réussi à faire ce groupement par deux et la conclusion est là : il y a autant de points sur le grand que sur le petit segment !

De ce genre de considérations va naître la théorie des ensembles. Parler d'ensemble infini mène parfois à des paradoxes si on n'y prend pas garde. Cela ne veut pas dire que ces ensembles n'existent pas (dans le sens qu'ils seraient impossibles à définir mathématiquement) mais qu'il faudra faire bien attention.

3.1.2 La crise des fondements

Au départ, la théorie des ensembles (qualifiée aujourd'hui souvent de «naïve») a été développée principalement par Cantor. Cette théorie a vite montré ses lacunes car on a découvert des paradoxes dans la théorie ce qui a provoqué une sorte de crise des mathématiques : la crise des fondements.

Donnons en exemple un paradoxe nommé "Paradoxe de Russell".

Ce paradoxe peut s'énoncer assez simplement. On considère l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes. Cet ensemble est-il élément de lui-même ou pas ?

1. Si on répond que oui, alors par définition, il n'est pas élément de lui-même...
2. Si on répond que non, alors par définition, il est cette fois-ci élément de lui-même.

On a là une contradiction apparemment incontournable, ce qui a intrigué beaucoup de mathématiciens.

Il existe une formulation plus simple de ce paradoxe, une illustration attribuée à Russell en personne. Il s'agit du paradoxe du barbier :

C'est un barbier à qui l'on demande de raser tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, *et seulement ceux-là*. Le problème est le suivant : se rase-t-il lui-même ou pas ?

1. Si il se rase lui-même, il ne doit pas se raser...
2. Si il ne se rase pas lui-même, alors il doit se raser !

Cette illustration simple du paradoxe de Russell a l'avantage d'être facile à résoudre : on voit que la règle imposée au barbier est absurde, et qu'un barbier capable de respecter cette règle n'existe pas. Tout comme il est absurde de définir un ensemble comme étant l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes.

Pour éviter ce genre de paradoxe, il faut donc axiomatiser la théorie des ensembles. En effet, nous avons vu que toute théorie doit être basée sur une axiomatique, et que cette théorie doit être consistante. Si on tombe sur des paradoxes, la théorie n'est pas consistante, et il faut changer un ou plusieurs axiomes.

C'est le travail qui a été fait par les mathématiciens sur la théorie des ensembles. On obtient alors *l'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel*, et on obtient une théorie consistante.

On ajoute à cette axiomatique un axiome supplémentaire : l'axiome du choix, et on parle donc souvent de l'axiomatique ZFC.

3.1.3 Quelques remarques sur les axiomes ZFC

On a donc des objets mathématiques appelés *ensembles* qui sont simplement définis comme étant des groupements d'objets. Attention, il s'agit d'une définition «naïve», la notion d'ensemble est défini correctement par les axiomes ZFC.

Les axiomes de la théorie des ensembles sont en fait assez simples à comprendre et la seule difficulté c'est peut être de comprendre l'axiome écrit de manière formelle. Il faut préciser en effet que les notions vues dans le cours de logique sont supposées connues, car les axiomes sont écrit dans le langage de la logique des prédicats égalitaire, avec juste le symbole \in en plus (plus d'autre que l'on peut définir, c'est à dire des symboles non primitifs, comme \subset par exemple). On peut donner un sens intuitif à « \in » : si on écrit $A \in B$ par exemple, on dit que A est un élément de B .

On peut encore préciser qu'en théorie des ensembles, on ne considère *que* des ensembles, par exemple, tout les éléments d'un ensemble sont des ensembles (et on verra même que l'on peut considérer les nombres $0, 1, 2, 3, \dots$ comme des ensembles!).

Une dernière remarque : vous verrez peut être des cours de théorie des ensembles où il y a plus d'axiomes, mais dans ce cas certains axiomes peuvent se déduire des autres. Ici, j'ai choisi de ne mettre que des axiomes indépendants.

3.2 Axiome d'extensionnalité

3.2.1 Idée générale de l'axiome

Cet axiome définit l'égalité de deux ensemble : si ils ont les mêmes éléments alors ils sont égaux. On peut déjà tirer comme conclusion qu'il n'y a pas d'ordre dans les éléments d'un ensemble, on peut lister les éléments d'un ensemble dans l'ordre que l'on veut : on a toujours le même ensemble. Puisqu'un ensemble n'est défini que par ses éléments, on dit qu'un ensemble ne dépend que de son *extension*.

3.2.2 Énoncé de l'axiome

Axiome : *Si deux ensembles ont les mêmes éléments, alors ils sont égaux.*

3.2.3 Écriture formelle

On peut écrire cet axiome de manière formelle en utilisant ce qui a été vu au cours de logique. Considérons deux ensembles quelconques, A et B . On regarde tous les ensembles possibles X , on a, si $A = B$:

1. si X appartient à A , alors X appartient à B ,
2. si X appartient à B , alors X appartient à A .

Ceci peut s'écrire en utilisant le langage de la logique (voir section précédente) :

$$(X \in A \Rightarrow X \in B) \wedge (X \in B \Rightarrow X \in A)$$

qui n'est jamais que la traduction en langage mathématique de ce que nous avons écrit en français.

Or nous avons vu dans le cours de logique ce que nous avons appelé une tautologie remarquable :

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

qui dit que si A implique B et B implique A , alors A est équivalent à B . On peut appliquer cela à l'expression que nous venons d'écrire et on obtient :

$$X \in A \Leftrightarrow X \in B$$

Si cette condition est remplie quel que soit l'ensemble X (c'est à dire dans le langage de la logique : $\forall X, X \in A \Leftrightarrow X \in B$) alors on a que $A = B$ et on peut écrire l'axiome en langage formel :

$$\forall A, \forall B, ((\forall X, X \in A \Leftrightarrow X \in B) \Rightarrow A = B)$$

3.3 Axiome de la réunion

3.3.1 Idée générale de l'axiome

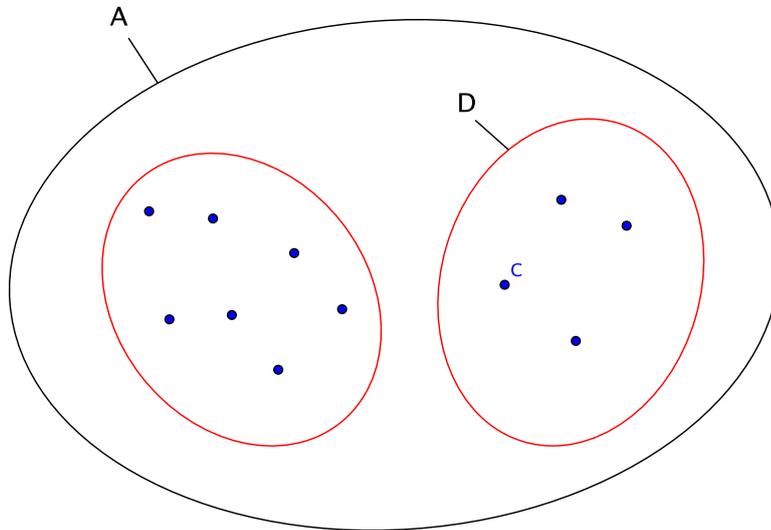
Cet axiome est utile pour définir la notion de l'union de deux ensembles (concept que l'on verra plus tard). Il exprime que pour un ensemble donné, il existe un ensemble qui est l'ensemble des éléments des éléments de cet ensemble.

3.3.2 Énoncé de l'axiome

Axiome : *Quel que soit l'ensemble A , il existe un ensemble B tel que les éléments de B soient les éléments de tout les éléments de A .*

3.3.3 Écriture formelle

Considérons l'illustration ci-dessous :



Sur ce dessin, on a représenté un ensemble A quelconque ainsi que deux de ses éléments. Ici il faut faire attention car le dessin est trompeur : on pourrait croire que les deux «patates» en rouges sont des sous-ensembles alors que ce sont des *éléments* de A .

L'un des éléments de A est un ensemble noté D dont l'un des éléments est C . L'axiome nous dit qu'il existe un ensemble B qui est l'ensemble des éléments des éléments de A . Cet ensemble B est représenté sur ce dessin en pointillés bleu, on a en particulier $C \in B$.

À partir de ce dessin, on peut essayer de trouver la formulation formelle de l'axiome. Soit donc un ensemble A quelconque. On doit exprimer qu'il existe un ensemble B qui soit l'ensemble des éléments des éléments de A . Pour cela, considérons un ensemble quelconque C . On a, si C appartient à B , que C appartient à un élément de A . Appelons D cet élément. On a :

$$D \in A \wedge C \in D$$

Cet ensemble D n'existe que si il existe un ensemble C appartenant à B . On peut intégrer tout cela en une expression logique qui est donc :

$$C \in B \Rightarrow \exists D, D \in A \wedge C \in D$$

Cela marche aussi dans l'autre sens, c'est à dire que si D est un ensemble appartenant à A alors il existe un ensemble B tel que C appartient à B et à D (voir encore schéma). On peut donc écrire :

$$\exists D, D \in A \wedge C \in D \Rightarrow C \in B$$

Comme pour l'axiome précédent, on peut invoquer la tautologie :

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

qui permet comme nous l'avons vu de remplacer deux implications par une équivalence.

On peut écrire l'axiome de manière formelle :

$$\forall A, \exists B, \forall C, (C \in B \Leftrightarrow \exists D(D \in A \wedge C \in D))$$

On verra un peu plus tard comment on définit l'union de deux ensembles (et surtout montrer que l'union de deux ensembles est un ensemble) et on se servira de cet axiome.

3.4 Axiome de l'ensemble des parties

3.4.1 Idée générale de l'axiome

Cet axiome introduit l'idée de «sous-ensemble». Il affirme que pour un ensemble donné, il existe un ensemble qui est l'ensemble des sous-ensemble de cet ensemble. On va donc préciser cette notion de sous-ensemble avant d'énoncer l'axiome.

3.4.2 Notion de sous-ensemble

La notion de sous-ensemble est simple à comprendre. Considérons deux ensembles quelconques A et B . On dit que B est un sous-ensemble de A si tout les éléments de B sont aussi éléments de A . Dans ce cas note :

$$A \subset B$$

On introduit donc un nouveau symbole : « \subset ». Il est possible de le définir avec les notations vues en logique. En regardant la définition de la notion de sous-ensemble, on peut se rendre compte que la formule :

$$\forall X, X \in A \Rightarrow X \in B$$

et équivalent à écrire $A \subset B$ ce qui définit donc le symbole « \subset ».

Remarque : on dit aussi lorsque $A \subset B$ que A est *inclus* dans B .

3.4.3 Énoncé de l'axiome

Axiome : *Quel que soit l'ensemble A , il existe un ensemble noté $P(A)$ qui est l'ensemble des sous-ensembles de A .*

3.4.4 Écriture formelle

En langage formel, l'axiome s'écrit :

$$\forall A, \exists P, \forall X (X \in P \Leftrightarrow X \subset A)$$

3.5 Schéma d'axiomes de remplacement

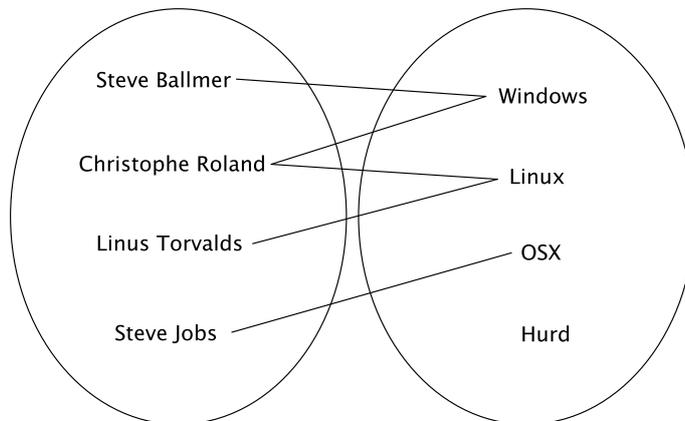
3.5.1 Idée générale de l'axiome

Cet axiome introduit l'idée de «relation fonctionnelle». Attention, il ne faut pas confondre avec la notion de fonction (au sens de la théorie des ensembles une fonction est un ensemble - à ne pas confondre avec les fonctions en logique). L'axiome dit simplement que l'image d'un ensemble par une relation fonctionnelle est un ensemble. Mais il est important d'introduire cette notion de relation fonctionnelle.

3.5.2 Les relations fonctionnelles

La notion de *relation* peut être comprise de manière «naïve» ce qui va nous aider pour écrire cet axiome. Il est important de souligner le fait que l'on va développer cette notion de manière naïve car la notion exacte de relation sera vue plus tard. Ce sera cependant suffisant pour écrire l'axiome correctement.

Considérons deux ensembles A et B . On peut définir une relation entre ces deux ensembles. Disons pour donner un exemple ludique que la relation est «utilise le système d'exploitation» et que A est l'ensemble contenant les éléments suivants : Steve Ballmer, Linus Torvalds, Steve Jobs, Christophe Roland (moi) et que B contient les éléments : Windows, Linux, OSX, Hurd. On peut représenter la relation par un diagramme :



On dit par exemple que l'élément «Christophe Roland» est envoyé sur les éléments «Windows» et «Linux» par cette relation. On dit que les éléments «Windows» et «Linux» sont les *images* de «Christophe Roland», et que «Christophe Roland» est un *antécédent* de «Windows» et «Linux». Pour donner d'autres exemples, «OSX» est l'image de «Steve Jobs» et «Hurd» n'a pas d'antécédents.

Une relation fonctionnelle est un type particulier de relation : une relation fonctionnelle est une relation où chaque élément a au plus une image (on dit bien «au plus» car on peut avoir des éléments qui n'ont pas d'image). On voit bien que l'exemple donné n'est pas une relation fonctionnelle car «Christophe Roland» a deux images.

3.5.3 Énoncé de l'axiome

Axiome : *l'image d'un ensemble par une relation fonctionnelle est un ensemble.*

3.5.4 Écriture formelle

On peut maintenant écrire l'axiome proprement. Pour cela considérons un prédicat à deux arguments X et Y plus d'autres paramètres éventuels que nous allons noter $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, on a donc : $P(X, Y, A_1, \dots, A_n)$. En fait, pourquoi fait-on cela ? On veut avoir une relation qui envoie X sur Y c'est à dire que Y est une image de X . On va dire que $P(X, Y, A_1, \dots, A_n)$ est équivalent à dire que Y est une image de X par cette relation. Pour que cette relation soit fonctionnelle, on doit écrire que si Y est une image de X , et si Y' est aussi une image de X , alors $Y = Y'$ car une relation fonctionnelle a au

plus une image. On écrit alors :

$$\forall A_1, \dots, A_n, \forall X, \forall Y, \forall Y', ((P(X, Y, A_1, \dots, A_n) \wedge P(X, Y', A_1, \dots, A_n)) \Rightarrow Y = Y')$$

Une fois ceci établi, il reste à dire que l'image d'un ensemble A par une fonction est un ensemble (on va le noter B), c'est à dire que quel que soit X appartenant à A , son image par la relation fonctionnelle appartient à B et que tout élément de B a un antécédent dans A . Pour cela, considérons un élément $Y \in B$. Il a un antécédent X c'est à dire :

$$Y \in B \Leftrightarrow \exists X (X \in A \wedge P(X, Y, A_1, \dots, A_n))$$

On remet tout cela ensemble pour écrire l'axiome :

$$\begin{aligned} &\forall A_1, \dots, A_n, (\forall X, \forall Y, \forall Y', (P(X, Y, A_1, \dots, A_n) \wedge P(X, Y', A_1, \dots, A_n) \Rightarrow Y = Y')) \\ &\Rightarrow \forall A, \exists B, \forall Y, (Y \in B \Leftrightarrow \exists X (X \in A \wedge P(X, Y, A_1, \dots, A_n))) \end{aligned}$$

Pourquoi dit-on que nous avons un schéma d'axiomes ? C'est simple : il y a autant d'axiomes que de prédicats P , on a en réalité un nombre infini d'axiomes.

3.5.5 Conséquences

Parlons maintenant des conséquences de cet axiome.

Schéma de compréhension

On peut tout d'abord trouver un cas particuliers de cet axiome : le cas où $X = Y = Y'$. On a que le début de l'axiome :

$$P(X, Y, A_1, \dots, A_n) \wedge P(X, Y', A_1, \dots, A_n) \Rightarrow Y = Y'$$

devient toujours vrai car $A \Rightarrow B$ est toujours vrai quand B est vrai. On peut donc tout simplement supprimer cette partie. De même, la lettre Y peut être remplacée par X (pour la simplicité) et $P(X, Y, A_1, \dots, A_n)$ devient : $P(X, X, A_1, \dots, A_n)$. On peut ensuite remplacer ce prédicat par un autre prédicat P' ayant un argument en moins en posant :

$$P(X, X, A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow P'(X, A_1, \dots, A_n)$$

On a donc (le prédicat P' est renommé P car il n'y a plus de confusion possible) :

$$\forall A_1, \dots, A_n, \forall A, \exists B, \forall X, (X \in B \Leftrightarrow (X \in A \wedge P(X, A_1, \dots, A_n)))$$

Ce résultat est souvent appelé «schéma d'axiome de compréhension» mais comme on peut le démontrer, il est préférable de ne pas le considérer comme un axiome. On l'appellera tout simplement schéma de compréhension (et on le considère comme un théorème).

On va maintenant parler des conséquences du schéma de compréhension.

Définition en compréhension

Si vous le relisez bien, vous pouvez remarquer que l'on peut l'énoncer ainsi : soit un ensemble A et une propriété P , il existe un ensemble B d'éléments de A vérifiant la propriété P . C'est à dire qu'on peut définir un ensemble B comme ceci :

Il est possible à partir de cet axiome de démontrer ce que l'on appelle parfois le «schéma d'axiome de compréhension». Il peut s'énoncer ainsi : soit un ensemble A et une propriété P , il existe un ensemble B d'éléments de A vérifiant la propriété P . C'est à dire qu'on peut définir un ensemble B comme ceci :

1. on donne un ensemble A dont B sera un sous-ensemble,
2. on donne une propriété P pour définir quels seront les éléments de B parmi les éléments de A .

Imaginons par exemple que l'on ait un ensemble A qui contienne les éléments suivants : 1, 2, 3, 4, 5. Si on a une propriété P qui veut dire : «strictement plus grand que 3», on peut alors définir l'ensemble B en utilisant le schéma de compréhension qui contiendra les éléments 4 et 5.

Ensemble vide

On peut à partir de cela trouver un autre résultat. Si on a un ensemble A quelconque, on peut définir un ensemble (que l'on va noter \emptyset) avec la propriété $P : \langle X \neq X \rangle$ avec le schéma de compréhension. Comme il n'existe aucun élément qui puisse satisfaire à P , l'ensemble B est vide, il n'a aucun éléments. L'ensemble vide est donc bien un ensemble au sens des axiomes ZFC.

Remarque : il faut pour cela que A existe dans le modèle de la théorie des ensembles, mais cela est assuré car en logique des prédicats on ne considère que des modèles non vide : il existe donc au moins un ensemble à partir duquel on peut définir l'ensemble vide.

Théorème de la paire

À partir du schéma d'axiomes de remplacement, on peut faire une autre déduction : ce que l'on nomme souvent «l'axiome de la paire» mais que nous n'allons pas considérer comme un axiome car on va le démontrer, et nous allons appeler ce résultat «théorème de la paire». Attention, vous ne rencontrerez cette expression pratiquement que sur ce site internet, car c'est historiquement un axiome.

Le théorème de la paire peut s'énoncer ainsi : soit deux ensembles A et B , il existe un ensemble C qui admet A et B comme élément - et seulement ceux ci. Démonstration : on sait que l'ensemble vide existe. Si nous appliquons l'axiome de l'ensemble des parties sur cet ensemble, on a que l'ensemble qui contient comme seul élément l'ensemble vide existe. En effet, le seul sous-ensemble de l'ensemble vide est l'ensemble vide.

On a donc un ensemble qui a \emptyset comme seul élément, et on va noter cet ensemble E . On applique une deuxième fois l'axiome de l'ensemble des parties sur E cette fois. On a donc comme résultat qu'il existe un ensemble qui contient deux éléments : l'ensemble vide et l'ensemble E et on va noter cet ensemble E' .

C'est là qu'on doit appliquer le schéma d'axiome de remplacement. Soit deux ensemble A et B . On utilise une relation fonctionnelle $P(X, Y)$ définit comme ceci :

$$P(X, Y) \Leftrightarrow ((X = \emptyset \wedge Y = A) \vee (X = E \wedge Y = B))$$

On peut facilement voir que cette relation est bien fonctionnelle. Pour ceux qui ont du mal avec cette expression logique, il faut juste se dire que A est l'image de \emptyset et que B est l'image de E . On applique donc cette relation sur l'ensemble E' :

1. comme $\emptyset \in E'$, par la relation P son image est A ,
2. comme $E \in E'$, par la relation P son image est B .

Et on obtient l'ensemble qui contient A et B comme seuls éléments et c'est bien un ensemble à cause du schéma d'axiome de remplacement.

3.6 Axiome de l'infini

3.6.1 Idée générale de l'axiome

Cet axiome est intéressant car il introduit un nouvel ensemble qui peut être vu comme un ensemble de nombres. Mais avant commencer nous avons besoin de définir la notion d'union de deux ensembles.

3.6.2 Union de deux ensembles

Soit deux ensembles A et B . On peut construire l'ensemble « A union B » qui contient tout les éléments de A et de B . On va essayer de construire l'ensemble « A union B » qui contient tout les éléments de A et de B . À partir des ensembles A et B on applique le théorème de la paire et on sait qu'il existe un ensemble C ayant A et B comme seuls éléments. On applique maintenant l'axiome de la réunion sur l'ensemble C , on sait donc qu'il existe un ensemble qui contient tout les éléments des éléments de C , c'est à dire tout les éléments de A et de B . On va noter cet ensemble $A \cup B$.

3.6.3 Ensemble ayant un élément quelconque

On doit utiliser un ensemble ayant un seul élément X , et il faut montrer qu'il est possible de construire cet ensemble à partir d'un ensemble quelconque X . Tout d'abord, si on applique le théorème de la paire sur deux fois le même ensemble X , on peut construire l'ensemble C qui contient deux fois l'élément X . En appliquant l'axiome d'extensionnalité sur l'ensemble C , on voit que C est égal à l'ensemble qui ne contient qu'un élément X (on peut supprimer les répétitions) et on a donc prouvé que l'on pouvait construire cet ensemble que nous allons noter $\{X\}$.

3.6.4 Énoncé de l'axiome

Axiome : *Il existe un ensemble ω dont l'ensemble vide est élément, tel que quel que soit X appartenant à ω , $X \cup \{X\} \in \omega$.*

3.6.5 Écriture formelle

En langage formel, l'axiome s'écrit :

$$\exists \omega (\emptyset \in \omega \wedge \forall X (X \in \omega \Rightarrow X \cup \{X\} \in \omega))$$

3.6.6 Conséquences

Il reste à discuter des conséquences de cet axiome.

Nous savons que l'ensemble vide appartient à ω . L'axiome nous dit encore que puisque $\emptyset \in \omega$, $\emptyset \cup \{\emptyset\} \in \omega$ mais on a (par définition de l'union et de l'ensemble vide) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ et donc $\{\emptyset\} \in \omega$ (rappelons que l'on note $\{X\}$ l'ensemble qui contient X comme unique élément).

Pour pousser le raisonnement plus loin on doit avoir des notations plus simples. On va donc noter $0 = \emptyset$. On a aussi l'ensemble $0 \cup \{0\}$ dans ω , ensemble que nous allons noter 1. On va dire que le *successeur* de 0 est 1, et on peut définir le successeur de 1 qui est $1 \cup \{1\}$ et qu'on note 2 et ainsi de suite. On a donc :

- $0 = \emptyset$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\}$,
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$,
- $4 = 3 \cup \{3\} = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$,
- ... ainsi de suite.

On peut donc considérer les nombres entiers comme des ensembles : chaque nombre est l'ensemble de tous les nombres entiers qui le précèdent. Par exemple l'ensemble $3 = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$ contient comme éléments les nombres 0, 1 et 2 (définition de l'union).

On sait donc qu'il existe un ensemble ω qui contient les éléments 0, 1, 2, 3, ... mais il est hâtif de dire qu'il ne contient que des nombres. Rien dans l'axiome ne permet d'affirmer cela. Pourtant, le fait qu'un tel ensemble existe ne fait pas de doute car cet ensemble est un sous-ensemble de ω . Cette remarque ne suffit cependant pas à définir cet ensemble de manière formelle. On verra cependant dans la partie «Nombres naturels» que l'on peut définir cet ensemble en compréhension.

3.7 Axiome de fondation

3.7.1 Idée générale de l'axiome

Ce axiome a comme conséquence qu'il n'existe pas d'ensemble X tel que $X \in X$. Pour pouvoir l'énoncer, il faut introduire la notion d'intersection entre deux ensembles.

3.7.2 Intersection

On considère deux ensembles A et B . L'intersection de A et B est l'ensemble qui contient tout les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B et on le note $A \cap B$. Pour définir cet ensemble de manière rigoureuse, on utilise le schéma de compréhension. On a vu que pour définir un ensemble en compréhension, il faut un ensemble et une propriété. Dans le cas de l'intersection, il suffit d'utiliser l'ensemble $A \cup B$ et la propriété $P(X) \Leftrightarrow (X \in A \wedge X \in B)$ pour que X appartienne à la fois à A et à B .

3.7.3 Énoncé de l'axiome

Axiome : Soit un ensemble $A \neq \emptyset$, il existe un ensemble B appartenant à A tel que A et B n'ont aucun éléments en commun.

3.7.4 Écriture formelle

Il n'est pas difficile d'écrire cet axiome de manière formelle :

$$\forall A, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B (B \in A \wedge A \cap B = \emptyset)$$

3.8 Éléments, sous-ensembles

3.8.1 Élément d'un ensemble

Rappelons tout d'abord une notion fondamentale : si on a deux ensembles A et B et que A est un élément de B , on note :

$$A \in B$$

Dans le cas contraire, on peut écrire :

$$A \notin B$$

3.8.2 Inclusion

Rappelons que si tout les éléments de A sont aussi élément de B , on dit que A est inclus dans B et qu'il est un sous-ensemble de B et on note :

$$A \subset B$$

On peut écrire aussi :

$$B \supset A$$

On dit aussi que B est un sur-ensemble de A . On rappelle aussi que l'on peut formaliser cette notion :

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall X, X \in A \Rightarrow X \in B)$$

3.8.3 Propriétés

Deux propriétés faciles à démontrer : *Première propriété* :

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

Démonstration :

On utilise la définition de l'inclusion, on peut réécrire :

$$\forall X, ((X \in A \Rightarrow X \in B) \wedge (X \in B \Rightarrow X \in C)) \Rightarrow (X \in A \Rightarrow X \in C)$$

On peut rappeler le modus barbara vu en logique :

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Et en comparant les deux expressions on voit qu'elles sont équivalentes ce qui achève la démonstration. *Deuxième propriété* :

$$(A \in B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \in C$$

On utilise encore la définition de l'inclusion :

$$\forall X, (A \in B \wedge (X \in B \Rightarrow X \in C)) \Rightarrow A \in C$$

Si l'expression $A \in B \wedge (X \in B \Rightarrow X \in C)$ est vraie on a que $A \in B$ est vrai ; et comme elle est vraie pour tout X , elle est donc vraie en particulier pour $X = A$, on a donc :

$$\forall X, (A \in B \wedge (X \in B \Rightarrow X \in C)) \Rightarrow (A \in B \wedge (A \in B \Rightarrow A \in C))$$

On a donc que $A \in B \wedge (A \in B \Rightarrow A \in C)$ est vrai, alors on sait que $A \in B \Rightarrow A \in C$ est vrai. Comme on sait que $A \in B$ est vraie, alors $A \in C$ est vrai aussi et on a donc prouvé l'implication.

3.9 Définir un ensemble

3.9.1 Définition en extension

Soit E un ensemble. Si a_1, a_2, \dots, a_n sont les éléments de E , on note :

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

On peut donc définir un ensemble en listant tout ses éléments entre des accolades (on dit alors que l'on définit l'ensemble en extension).

Il faut maintenant prouver que l'on a vraiment le droit de faire cela c'est à dire que c'est compatible avec les axiomes vus précédemment.

Tout d'abord, nous avons montré que l'on pouvait avoir un ensemble du type $\{a_1\}$. Nous avons montré aussi que nous pouvions avoir des ensembles ayant deux éléments :

$\{a_1, a_2\}$ grâce au théorème de la paire. Cependant, il faut que cette définition soit valide pour un nombre quelconque d'éléments.

Pour cela, il suffit simplement de faire appel à l'union de deux ensembles. Et il suffit d'écrire, pour définir formellement cette notation :

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

Grâce à l'axiome d'extensionnalité, on sait qu'un ensemble ne dépend que de ses éléments ce qui montre qu'on définit bien un ensemble unique et ce qui valide la définition en extension.

3.9.2 Définition en compréhension

Nous savons déjà comment définir un ensemble en compréhension en donnant un sur-ensemble et une propriété.

Par exemple, si on veut définir l'ensemble E , sous-ensemble de A avec la propriété P , on note :

$$E = \{x \in A | P(x)\}$$

On verra plus tard des exemples d'utilisation de cette méthode de définition.

3.10 Union et intersection

3.10.1 Union

Propriétés

Il est possible à partir de la définition de l'union de deux ensembles de prouver certaines propriétés :

Idempotence

$$A \cup A = A$$

Commutativité

$$A \cup B = B \cup A$$

Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Définition

On a déjà défini l'union de deux ensembles, rappelons que si on a deux ensembles A et B , on forme l'ensemble $\{A, B\}$ grâce à l'axiome de la paire, et on applique à cet ensemble l'axiome de la réunion : on obtient l'ensemble $A \cup B$ noté par la lettre D dans l'axiome de la réunion.

Propriétés

On peut déjà lister quelques propriétés de l'union. On peut toutes les prouver avec les axiomes vues précédemment.

Idempotence

$$A \cup A = A$$

Commutativité

$$A \cup B = B \cup A$$

Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

3.10.2 Intersection

Définition

Si on a deux ensembles A et B , on forme l'ensemble $A \cap B$ qui est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B . On le définit en compréhension :

$$A \cap B = \{X \in A \cup B \mid X \in A \wedge X \in B\}$$

Propriétés

Elles sont similaires à celle de l'union.

Idempotence

$$A \cap A = A$$

Commutativité

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3.10.3 Distributivité

On peut énoncer encore deux propriétés de l'union et de l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Et :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3.11 Relations binaires

On peut maintenant voir de manière formelle la notion de relation déjà abordée de manière naïve.

3.11.1 Notion de couple

On doit tout d'abord définir la notion de *couple*. L'idée est qu'à partir de deux éléments a et b , on construit un couple que l'on va noter (a, b) . Un couple est une paire ordonnée c'est à dire que l'ordre a une importance, on a $(a, b) \neq (b, a)$.

On doit définir cette notion à partir de la théorie des ensembles c'est à dire comme d'habitude qu'on doit n'avoir que des ensembles donc un couple sera un ensemble. Malheureusement, on ne peut pas définir simplement le couple en écrivant $(a, b) = \{a, b\}$ car nous avons vu (axiome d'extensionnalité) que $\{a, b\} = \{b, a\}$ ce qui contredit $(a, b) \neq (b, a)$.

Pour pouvoir résoudre cette difficulté, on définit le couple comme ceci :

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Avec cette définition on a bien $(a, b) \neq (b, a)$ car $\{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{b, a\}\}$.

3.11.2 Produit cartésien

En utilisant la notion de couple, on définit la notion de *produit cartésien*. Si on a deux ensembles A et B , leur produit cartésien est l'ensemble noté $A \times B$, et dont les éléments sont des couples avec le premier élément dans A et le deuxième dans B .

Par exemple, si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{0, 2, 4\}$, alors :

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4)\}$$

On peut maintenant définir cette notion de manière formelle. On a deux ensembles A et B . On va essayer de définir cet ensemble en compréhension. La propriété qu'on va utiliser pour que $(a, b) \in A \times B$ est tout simplement $a \in A \wedge b \in B$. Reste à définir le sur-ensemble de $A \times B$ et c'est plus compliqué.

Soit $a \in A$ et $b \in B$. On a bien $(a, b) \in A \times B$. On a aussi que $\{a, b\} \subset A \cup B$ donc que $\{a, b\} \in P(A \cup B)$. De même on a que $\{a\} \subset A \cup B$ donc que $\{a\} \in P(A \cup B)$ (rappel : $P(X)$ est l'ensemble des parties de X).

On sait donc que $\{a, b\} \in P(A \cup B)$ et que $\{a\} \in P(A \cup B)$. On conclut alors que $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in P(P(A \cup B))$. On peut alors écrire :

$$A \times B = \{(a, b) \in P(P(A \cup B)) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

De plus on écrit souvent A^2 au lieu de $A \times A$ ou A^3 au lieu de $A \times A \times A, \dots$

3.11.3 Relations binaires

Définition

On a déjà vu cette notion de manière naïve, il est temps d'en donner une définition formelle dans le cadre de la théorie des ensembles. On va dire (sans surprise encore une fois) qu'une *relation binaire* est un ensemble.

On sait déjà qu'une relation binaire met en relation deux ensembles. On va donc considérer une relation comme un ensemble de couples. Par exemple si la relation est notée R , et si a et b sont en relation, alors on a $(a, b) \in R$.

Supposons donc qu'on ait deux ensembles A et B . On a une relation R entre ces deux ensembles. Il s'agit d'un ensemble de couple (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$, donc un sous-ensemble de $A \times B$.

On peut alors considérer que tout sous-ensemble de $A \times B$ est une relation binaire. L'ensemble des relations binaires entre A et B sera noté $A \rightleftharpoons B$. On a évidemment :

$$A \rightleftharpoons B = P(A \times B)$$

Domaine et ensemble image

On définit aussi le *domaine* d'une relation binaire. Une relation binaire entre A et B associe à des éléments de A des éléments de B , mais certains éléments de A ne sont associés à aucun élément de B . On va donc définir un ensemble (le domaine) qui est l'ensemble des éléments de A qui sont en relation avec au moins un élément de B . Si la relation est R , on note le domaine : $Dom(R)$.

On peut facilement définir le domaine en compréhension :

$$Dom(R) = \{x \in A \mid \exists y, (x, y) \in R\}$$

De même, il existe des éléments de B qui ne sont associés à aucun élément de A . On définit alors l'*ensemble image* qui est l'ensemble des éléments de B qui sont en relation avec au moins un élément de A , ensemble que l'on note $Im(R)$.

$$Im(R) = \{y \in B \mid \exists x, (x, y) \in R\}$$

Inverse

On a une relation R entre A et B . On peut définir l'*inverse* de R , que l'on note R^{-1} , qui est la même relation en échangeant les ensembles A et B , c'est à dire que si le couple (a, b) appartient à R alors (b, a) appartient à R^{-1} . On a donc :

$$R^{-1} = \{(y, x) \in A \times B \mid (x, y) \in R\}$$

Composée

Si on a une relation R de A vers B et une relation R' de B vers C , alors on peut définir la *composée* de R et R' que l'on note $R \circ R'$ qui est une relation de A vers C . Si

par exemple on a un élément $a \in A$ en relation par R avec un élément $b \in B$ et que cet élément est en relation par R' avec un élément $c \in C$, alors a et c sont en relation par $R \circ R'$.

On définit cet ensemble en compréhension :

$$R \circ R' = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y, ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R')\}$$

3.12 Différents types de relations

3.12.1 Fonction

Une *fonction* est une relation où chaque élément a au plus une image. C'est à dire que si on a une fonction f , alors un élément $a \in Dom(f)$ a une seule image, donc il existe un seul élément $b \in Im(f)$ tel que $(a, b) \in f$.

Puisque chaque élément $x \in Dom(f)$ a une seule image, on note cette image $f(x)$ ce qu'on ne pourra pas faire avec une relation qui ne soit pas une fonction, car si x avait deux images, on ne saurait pas laquelle des deux désigne l'expression $f(x)$.

On a donc si f est une fonction :

$$x \in Dom(f) \Rightarrow \exists! y, (x, y) \in f$$

3.12.2 Application

Une *application* est un type particuliers de fonction : il s'agit d'une fonction où tous les éléments de l'ensemble de départ on une image. Si A est l'ensemble de départ, on a :

$$Dom(f) = A$$

3.12.3 Injection

Une *injection* est un type particuliers d'application : tous les éléments de l'ensemble d'arrivée on au plus un antécédent. C'est à dire que :

$$y \in Im(f) \Rightarrow \exists! x, (x, y) \in f$$

3.12.4 Surjection

Une *surjection* est un type particuliers d'application : tous les éléments de l'ensemble d'arrivée on au moins un antécédent. C'est à dire que si B est l'ensemble d'arrivée :

$$Im(f) = B$$

3.12.5 Bijection

Une *bijection* est une application à la fois injective et surjective. Dans le cas d'une bijection, chaque élément de l'ensemble de départ a une et une seule image et chaque élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent. On peut donc conclure que si il existe une bijection entre A et B , alors ils ont le même nombre d'éléments.

3.12.6 Loi de composition interne

Définition 22. Soit E un ensemble, une loi de composition interne sur E est une application de $E \times E$ dans E dans E .

Une loi de composition interne est souvent noté avec un simple symbole comme \circ . On note, si l'image de $(a, b) \in E$ est $c \in E$:

$$a \circ b = c$$

Définition 23. Soit E un ensemble, \circ une loi de composition interne sur cet ensemble, on dit que cette loi est commutative si :

$$\forall a, b \in E, a \circ b = b \circ a$$

Définition 24. Soit E un ensemble, \circ une loi de composition interne sur cet ensemble, on dit que cette loi est associative si :

$$\forall a, b, c \in E, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Définition 25. Soit E un ensemble, \circ une loi de composition interne sur cet ensemble, on dit qu'il existe un élément neutre pour \circ si :

$$\exists n \in E : \forall a \in E, a \circ n = a$$

Définition 26. Soit E un ensemble, \circ une loi de composition interne sur cet ensemble, on dit qu'il existe un élément neutre pour \circ si :

$$\exists n \in E : \forall a \in E, a \circ n = a$$

Définition 27. Soit E un ensemble, \circ une loi de composition interne sur cet ensemble qui admet un élément neutre n , on dit qu'il existe un élément symétrique pour chaque élément de E si :

$$\forall a \in E, \exists a^* \in E : a \circ a^* = n$$

Définition 28. Soit E un ensemble, \circ et \bullet deux lois de composition interne sur cet ensemble, on dit qu'on a distributivité de \circ par rapport à \bullet si :

$$\forall a, b, c \in E, a \circ (b \bullet c) = (a \circ b) \bullet (a \circ c)$$

Chapitre 4

Nombres

4.1 L'ensemble des naturels

4.1.1 Introduction

Le concept de «nombre» existe depuis la nuit des temps. C'est un concept fondamental en mathématique, c'est pourquoi Gauss disait : *La mathématique est la reine des sciences et la théorie des nombres est la reine des mathématiques.*

Un type de nombre en particuliers se distingue des autres : *les nombres naturels*. On désigne sous ce terme les nombres entiers positifs : 0, 1, 2, 3, ... sont des nombres naturels. L'ensemble des nombres naturels est noté par la lettre \mathbb{N} .

Les pythagoriciens attribuaient à ces nombres un statut spécial. Pour eux, seuls les nombres naturels étaient vraiment «naturels», et le résultat d'une mesure ne pouvait être qu'un nombre naturel, ou un rapport entre deux nombres naturels (une fraction entière). Pourtant, un jour, les pythagoriciens démontrèrent qu'un nombre ayant une signification géométrique claire (dans le sens que l'on peut facilement construire géométriquement un segment dont la longueur est ce nombre) ne pouvait pas se mettre sous la forme d'une fraction entière. Ce nombre est la racine carré de deux.

La découverte de ce nombre jeta un trouble chez les disciples de Pythagore : cela contredisait leur philosophie ! Il est d'ailleurs intéressant que ces nombres (qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction entière) ont été baptisés «irrationnels». Le trouble fut tel qu'il fut décidé que cette découverte devait rester secrète. Ainsi on raconte même qu'un pythagorien, Hippase de Métaponte, fut jeté à la mer et mourra noyé pour avoir osé divulgué ce secret. Proclus, un historien du cinquième siècle raconte :

«On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret ; ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues.»

Cette histoire illustre bien l'étrange attraction qu'exerce l'ensemble des naturels. Leurs importance n'est pas seulement philosophique : les naturels ont une place de choix dans les mathématiques, par exemple, c'est à partir de cet ensemble que nous allons

définir le raisonnement par récurrence, technique de démonstration très puissante.

Nous avons déjà introduit le concept de nombre naturel en terme d'ensemble. On arrivait à construire à partir de l'axiome de l'infini un ensemble qui contenait des nombres entiers avec des propriétés étranges comme $1 \in 2$ car on avait considéré les nombres comme des ensembles. On avait dit alors que l'on pouvait prouver qu'il existe un ensemble qui ne contient que des nombres puisqu'on n'était pas sûr que c'était le cas de l'ensemble ω . Ce ce que nous allons faire maintenant.

4.1.2 Définir l'ensemble des naturels

Nous avons montré dans le cadre de la théorie des ensembles, que l'on pouvait construire un ensemble qui contient les éléments $0, 1, 2, 3, \dots$ plus éventuellement d'autres éléments. Il suffit donc, pour définir l'ensemble des nombres naturels, de considérer l'ensemble de ces ensembles, et de dire que l'ensemble des naturels est «le plus petit» de ces ensembles. On élimine ainsi les éléments «parasites». La manière formelle dont on procède est décrite dans les modes «normal» et «difficile».

On sait tout d'abord qu'il existe au moins un ensemble, que nous notons ω , qui a comme propriété :

$$\emptyset \in \omega \wedge \forall X (X \in \omega \Rightarrow X \cup \{X\} \in \omega)$$

D'autres ensembles que ω ont peut-être aussi cette propriété. On va noter cette propriété P :

$$P(E) \Leftrightarrow (\emptyset \in E \wedge \forall X (X \in E \Rightarrow X \cup \{X\} \in E))$$

Il existe donc certainement plusieurs ensembles vérifiant cette propriété. Parmi eux se trouve l'ensemble de nombres que l'on cherche à définir, plus d'autres qui sont des sur-ensembles de cet ensemble car ils ont des éléments en plus. L'ensemble de nombres est donc «le plus petit» de ces ensembles. On va le noter \mathbb{N} .

Puisque \mathbb{N} est «le plus petit» de ces ensembles, si on a un élément $n \in \mathbb{N}$, alors n est aussi élément de tous les ensembles qui vérifient la propriété P . De même, si n est élément de tous les ensembles qui vérifient la propriété P , alors $n \in \mathbb{N}$ puisque \mathbb{N} vérifie la propriété P . On tiens donc un critère pour savoir quels éléments parmi les éléments de ω sont éléments de \mathbb{N} et on le définit en compréhension :

$$\mathbb{N} = \{n \in \omega \mid \forall E, P(E) \Rightarrow n \in E\}$$

On a donc l'ensemble :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

On dit que c'est l'ensemble des *nombres naturels*.

4.1.3 Notion de successeur

Définition 29. On a vu que si $n \in \mathbb{N}$, alors $n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$. On va dire que $n \cup \{n\}$ est le successeur de n , et on va le noter $s(n)$. On a donc $s(n) = n \cup \{n\}$ et il est facile de voir que s est une fonction de \mathbb{N} vers \mathbb{N} .

Nous avons vu en théorie des ensemble, que l'on peut définir la notion de successeur dans l'ensemble des naturels (voir l'axiome de l'infini). Ainsi, à chaque nombre $x \in \mathbb{N}$, on peut associer «l'élément suivant» que l'on note $s(x)$.

On a donc tout simplement : $s(0) = 1, s(1) = 2, \dots$

4.2 Relation d'ordre

Si nous avons deux nombres $a, b \in \mathbb{N}$, alors on peut dire que l'un est «plus petit» que l'autre, et on note si a est plus petit que b , $a < b$. On peut facilement définir cette notion de manière formelle avec ce qui a été vu précédemment, on a tout simplement :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a < b \Leftrightarrow a \in b$$

Et si $a < b$, on peut écrire aussi $b > a$.

En plus de la notion de «plus petit que» on définit «plus petit ou égal à» et si a est plus petit ou égal à b , on note : $a \leq b$ ou $a \leq b$. On le définit comme ceci :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a \leq b \Leftrightarrow (a \in b \vee a = b)$$

On va dire que nous définissons ainsi une *relation d'ordre* sur \mathbb{N} car on introduit l'idée d'«ordre» entre les éléments.

Il reste à définir ce qu'est vraiment une relation d'ordre de manière générale, car on rencontrera ce type de relation dans d'autres ensembles que dans \mathbb{N} . On va voir qu'en fait « \leq » est une relation d'ordre et que « $<$ » est une relation d'ordre strict.

4.2.1 Définition

Sans surprise, on va définir la relation d'ordre comme une relation binaire.

Définition 30. *On dit que la relation binaire R est une relation d'ordre sur un ensemble E , si elle est réflexive, antisymétrique et transitive (si x et y sont en relation, on écrit xRy) :*

1. réflexive : $\forall x \in E, xRx$,
2. antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2, (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$,
3. transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$.

On peut facilement se rendre compte que « \leq » est une relation d'ordre.

On définit aussi la notion de relation d'ordre strict : une relation d'ordre strict est une relation binaire *irréflexive* et transitive. On dit qu'une relation est irréflexive si aucun élément n'est en relation avec lui-même :

$$\forall x \in E, \neg(xRx)$$

On peut facilement se rendre compte que « $<$ » est une relation d'ordre strict.

4.2.2 Ordre totale et partiel

Définition 31. Si R est une relation d'ordre sur l'ensemble E et qu'elle vérifie :

$$\forall(x, y) \in E^2, (xRy) \vee (yRx)$$

alors on dit que c'est une relation d'ordre totale. On dit aussi que E est totalement ordonné ou que (E, R) est un ordre totale.

4.3 Principe de récurrence

Nous allons voir maintenant que la structure de l'ensemble \mathbb{N} permet une nouvelle technique de démonstration : la démonstration par récurrence.

4.3.1 Idée générale du principe de récurrence

Supposons que nous devions démontrer une formule qui dépend uniquement d'un nombre naturel n , c'est à dire une propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si cette propriété est P , on a que $P(n)$ est vrai quel que soit n . Le problème est de savoir comment démontrer que $P(n)$ est toujours vrai.

En effet, on peut écrire une démonstration pour démontrer que $P(0)$ est vrai. Puis faire la même chose pour $P(1)$, puis pour $P(2)$, ... mais on n'aura jamais fini la démonstration. Face à ce problème, on peut tenter de prouver $P(n)$ sans faire d'hypothèse sur n c'est à dire que l'on démontre directement $P(n)$ mais ce n'est pas toujours possible ni toujours facile.

Il est cependant parfois possible de démontrer que si pour un certain n $P(n)$ est vrai, alors $P(s(n))$ est vrai aussi. L'idée est donc de montrer d'abord que $P(0)$ est vrai. On suppose alors que $P(n)$ est vrai pour un certain n ce que l'on appelle l'*hypothèse de récurrence*. Ensuite on démontre que $P(s(n))$ est vrai avec cette hypothèse.

Cette démarche est suffisante pour prouver $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, on sait que $P(0)$ est vrai (car on le démontre au préalable). Puisqu'on montre ensuite que si $P(n)$ est vrai, alors $P(s(n))$ est vrai aussi, cela veut dire que $P(1)$ est vrai car $P(0)$ est vrai. De la même manière, cela prouve que $P(2)$ est vrai puisque $P(1)$ est vrai, et donc $P(3)$ et ainsi de suite. On a donc démontré $P(n)$ pour tout n .

4.3.2 Écriture formelle du principe

Dans une démonstration par récurrence on démontre $P(0)$ et on démontre $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(s(n))$. Remarquez qu'on devrait écrire formellement : $\forall n, (n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \Rightarrow P(s(n)))$ mais on ne le fait pas pour rendre l'écriture de la formule plus facile à lire. Désormais on va accepter ce léger abus de notation.

Le principe de récurrence nous dit donc que si ces deux choses sont prouvées, alors on a montré $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. On a donc :

$$(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(s(n))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$$

4.3.3 Démonstration

Il reste à démontrer cette formule. On suppose donc que $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(s(n))$ sont vrais et on démontre $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. On va le faire par l'absurde. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit faux. On considère le plus petit n tel que $P(n)$ soit faux, et on le note m . $m \neq 0$ car on sait que $P(0)$ est vrai. m est donc le successeur d'un entier p . p est donc plus petit que m et donc $P(p)$ est vrai. On a donc par hypothèse que $P(s(p)) = P(m)$ est vrai et on a une contradiction.

4.4 L'addition

4.4.1 Définition

Tout le monde connaît ce qu'est l'addition de deux nombres naturels depuis l'école primaire. On va essayer donc d'aller plus loin et de définir cette notion de manière formelle. On va donc définir l'addition comme une fonction.

Imaginons que nous voulons additionner deux nombres a et b . On va dire que b est l'argument de la fonction «addition», c'est à dire que la fonction s'applique sur b et non sur a . En fait pour chaque a différents, on a une fonction différente.

C'est à dire que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a une fonction f_a de \mathbb{N} vers \mathbb{N} , que nous devons définir uniquement à partir des seules notions que nous avons déjà définies dans \mathbb{N} , on va donc définir cette notion à partir de la notion de successeur.

On définit donc l'addition comme ceci :

$$\begin{cases} f_a(0) = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_a(s(n)) = s(f_a(n)) \end{cases}$$

Et on note : $f_a(n) = a + n$. Les deux propriétés qui définissent l'addition peuvent donc s'écrire :

$$a + 0 = a$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + s(n) = s(a + n)$$

Ces deux seules propriétés suffisent à définir l'addition.

On remarque que l'on peut facilement démontrer quelque chose d'intuitif : $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) = n + 1$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + s(n) = s(a + n)$$

donc pour $n = 0$ on a :

$$a + s(0) = s(a + 0)$$

donc :

$$a + 1 = s(a)$$

On peut donc aussi réécrire la deuxième propriété comme ceci : $a + (n + 1) = (a + n) + 1$.

On va maintenant énoncer une série de propriétés de l'addition.

Théorème 2. *L'addition est associative, c'est à dire que :*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a + b) + c = a + (b + c)$$

On faire cette démonstration par récurrence sur c . On doit donc tout d'abord prouver que c'est vrai pour $c = 0$:

$$(a + b) + 0 = a + (b + 0) \Rightarrow a + b = a + b$$

ce qui est vrai car on sait que $a + 0 = a$. Il reste à montrer que si on a : $(a + b) + c = a + (b + c)$ pour un certain c , alors on a : $(a + b) + (c + 1) = a + [b + (c + 1)]$.

On a :

$$\begin{aligned} (a + b) + (c + 1) &= [(a + b) + c] + 1 \\ &= [a + (b + c)] + 1 \\ &= a + [(b + c) + 1] \\ &= a + [b + (c + 1)] \end{aligned}$$

On utilise la propriété : $a + (n + 1) = (a + n) + 1$ à la première, troisième et quatrième ligne. On utilise l'hypothèse de récurrence à la deuxième ligne.

Théorème 3. *L'addition admet un élément neutre, qui n'est autre que zéro :*

$$\forall a \in \mathbb{N}, a + 0 = 0 + a = a$$

On sait déjà que $a + 0 = a$, il reste à montrer que $0 + a = a$. On va le faire par récurrence.

On a déjà que $0 + 0 = 0$. On a comme hypothèse de récurrence : $0 + a = a$ et on doit montrer : $0 + (a + 1) = a + 1$.

$$0 + (a + 1) = (0 + a) + 1 = a + 1$$

Théorème 4. *L'addition est commutative, c'est à dire que :*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$$

Pour démontrer cela, on doit démontrer au préalable que $a + 1 = 1 + a$. On va le faire par récurrence. On a pour $a = 0$: $0 + 1 = 1 + 0$ ce qui est vrai car 0 est l'élément neutre.

Donc, l'hypothèse de récurrence étant $a + 1 = 1 + a$, on montre $(a + 1) + 1 = 1 + (a + 1)$:

$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 = 1 + (a + 1)$$

On peut montrer maintenant $a + b = b + a$ par récurrence sur b . On doit donc montrer sous l'hypothèse $a + b = b + a$ que $a + (b + 1) = (b + 1) + a$:

$$\begin{aligned} a + (b + 1) &= (a + b) + 1 \\ &= (b + a) + 1 \\ &= b + (a + 1) \\ &= b + (1 + a) \\ &= (b + 1) + a \end{aligned}$$

4.5 La multiplication

On utilise le même type de définition que pour l'addition.

4.5.1 Définition

Pour tout $a \in \mathbb{N}$ on a une fonction g_a de \mathbb{N} vers \mathbb{N} définie par :

$$\begin{cases} g_a(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, g_a(n+1) = g_a(n) + a \end{cases}$$

Et on note : $g_a(n) = a \cdot n$ ou encore an ou plus rarement $a \times n$. Les deux propriétés qui définissent la multiplication peuvent donc s'écrire :

$$a \cdot 0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \cdot (n+1) = a \cdot n + a$$

Théorème 5. *Distributivité par rapport à l'addition :*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a(b+c) = ab+ac$$

Démonstration par récurrence sur c . On a pour $c = 0$:

$$a(b+0) = ab = ab + a \cdot 0$$

On démontre donc que $a[b+(c+1)] = ab+a(c+1)$ sous l'hypothèse que $a(b+c) = ab+ac$:

$$\begin{aligned} a[b+(c+1)] &= a[(b+c)+1] \\ &= a(b+c) + a \\ &= (ab+ac) + a \\ &= ab + (ac+a) \\ &= ab + a(c+1) \end{aligned}$$

Théorème 6. *Associativité*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (ab)c = a(bc)$$

Démonstration par récurrence sur c . Pour $c = 0$:

$$(ab) \cdot 0 = 0 = a(b \cdot 0)$$

Et donc sous l'hypothèse que $(ab)c = a(bc)$:

$$\begin{aligned} (ab)(c+1) &= (ab)c + ab \\ &= a(bc) + ab \\ &= a(bc+b) \\ &= a[b(c+1)] \end{aligned}$$

Théorème 7. *Élément neutre :*

$$\forall a \in \mathbb{N}, a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$$

On peut déjà prouver facilement que $a \cdot 1 = a$ avec la propriété $a(n+1) = an + a$ pour $n = 0$: $a \cdot 1 = a(0+1) = a \cdot 0 + a = a$. Il reste à montrer que $1 \cdot a = a$ et sans surprise par récurrence. Pour $a = 0$ on a bien $1 \cdot 0 = 0$.

On suppose donc $1 \cdot a = a$ et on a $1 \cdot (a+1) = 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = a + 1$.

Théorème 8. *Élément absorbant :*

$$\forall a \in \mathbb{N}, a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

On sait déjà que $a \cdot 0 = 0$, il reste à montrer que $0 \cdot a = 0$. On le fait par récurrence. Pour $a = 0$ on a bien $0 \cdot 0 = 0$.

On suppose donc $0 \cdot a = 0$, on a :

$$0 \cdot (a+1) = 0 \cdot a + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

Théorème 9. *Commutativité :*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, ab = ba$$

Par récurrence sur b . Pour $b = 0$ on a bien $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. On suppose donc $ab = ba$:

$$a(b+1) = ab + a = ba + a = (b+1)a$$

Chapitre 5

Algèbre linéaire

5.1 Espaces vectoriels

5.1.1 Notion intuitive de vecteur

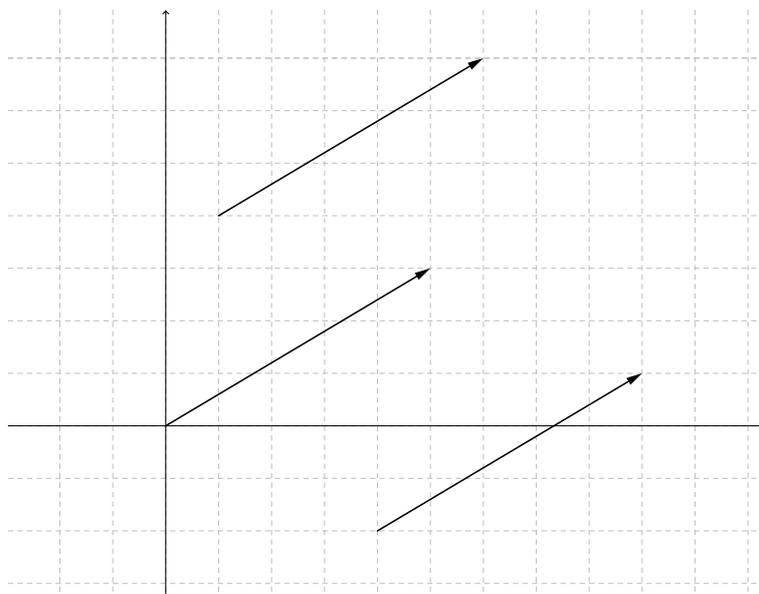
La notion intuitive de vecteur est très facile à comprendre. Il existe en effet une approche géométrique très simple, qui est celle donnée dans l'enseignement secondaire. Nous allons commencer par cette vision intuitive, mais nous allons aussi directement donner la définition la plus abstraite et générale possible, ce qui nous permettra d'utiliser ces notions dans des contextes relativement inattendus.

Mais pour l'instant nous n'en sommes pas encore là. On va considérer un vecteur comme une «flèche», c'est à dire qu'un vecteur possède trois caractéristiques :

1. une direction,
2. un sens,
3. une norme.

Il ne faut pas confondre sens et direction : une droite suffit pour donner une direction, mais on peut suivre une droite dans les deux sens possibles. La norme du vecteur, est intuitivement, la «longueur de la flèche».

Une conséquence immédiate du fait qu'il suffit de donner une direction, un sens et une norme pour définir un unique vecteur, c'est que deux flèches parallèles, de même sens et de même longueurs, définissent le même vecteur. Ainsi, sur la figure suivante :



On a trois représentations d'un seul et unique vecteur. Ainsi, il suffit par exemple de choisir le vecteur partant de l'origine. Les coordonnées de la pointe de la flèche suffisent alors à spécifier un unique vecteur. Il existe donc une correspondance biunivoque (c'est à dire une bijection) entre l'espace des points (\mathbb{R}^n). Ainsi, on peut même considérer les points de \mathbb{R}^n comme des vecteurs!

Pour des raisons évidentes, on va convenir de noter un vecteur avec une flèche au dessus : \vec{v} , certains auteurs choisissent plutôt de mettre en gras : \mathbf{v} . Comme on a supposé que l'on peut considérer les éléments de \mathbb{R}^n , il est tentant d'écrire :

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Cette écriture suggère le sens que l'on pourrait donner à l'addition de deux vecteurs. Si $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ et $\vec{u} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, il est tentant d'écrire :

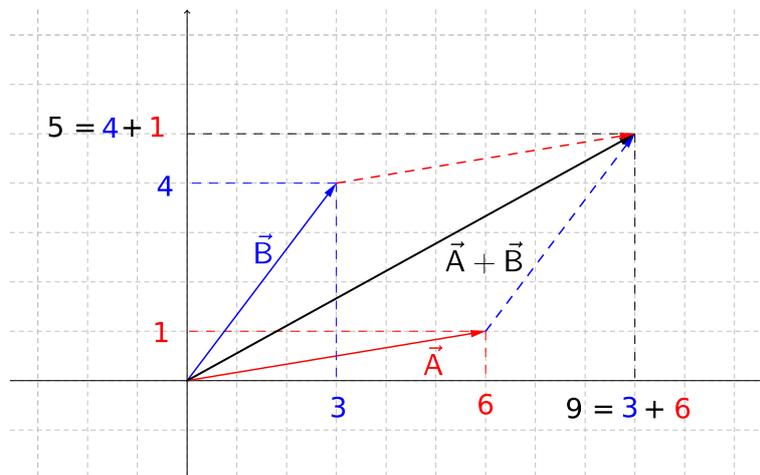
$$\vec{v} + \vec{u} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$$

On voit directement que l'addition de deux vecteurs est :

- commutative c'est à dire que pour tout vecteurs \vec{v} et \vec{u} on ait $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$,
- associative c'est à dire que pour tout vecteurs \vec{u} , \vec{v} , et \vec{w} , on ait $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$,
- qu'il existe un élément neutre c'est à dire qu'il existe un élément que l'on va noter $\vec{0}$ tel que pour tout vecteur \vec{v} , on ait $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$, ici on a simplement $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$
- et enfin qu'il existe un inverse c'est à dire que pour tout vecteur \vec{v} , il existe un vecteur que l'on convient de noter $-\vec{v}$, tel que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, si $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, alors $-\vec{v} = (-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$.

On peut donner une interprétation géométrique simple de l'addition de deux vecteurs. Sur la figure suivante, on a les vecteurs $\vec{A} = (6, 1)$ et $\vec{B} = (3, 4)$, leur somme est donnée

par $\vec{A} + \vec{B} = (6+3, 1+4) = (9, 5)$. Géométriquement, on voit que l'on peut soit transporter parallèlement la flèche représentant le vecteur \vec{B} de façon à le ramener sur l'extrémité de la flèche représentant le vecteur \vec{A} , soit faire le contraire :



Sur la figure, les flèches transportées parallèlement sont en pointillés. La représentation «en flèche» des vecteurs, permet d'exprimer cette propriété géométrique de façon algébrique. Si on note \overrightarrow{AB} le vecteur représentée par une flèche qui part du point A et arrive au point B , alors on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

C'est la *relation de Chasles*.

Remarque : il est possible de définir la notion de *vecteur lié* en disant que deux points A et B définissent toujours un et un seul vecteur lié : \overrightarrow{AB} . Deux tels vecteurs liés qui définissent le même vecteur, sont dit *équipollents*.

Ayant maintenant esquissé la notion d'addition de vecteurs, nous allons passer à une autre opération très simple sur les vecteurs : la *multiplication par un scalaire*. L'idée est de pouvoir «faire varier la norme» du vecteur, donc «changer la longueur de la flèche». le terme «scalaire» vient du latin «scalaris», «scala» en latin signifiant «échelle», ainsi multiplier scalairement revient à «changer l'échelle» du vecteur.

Ainsi, si on veut par exemple multiplier la norme d'un vecteur \vec{v} par deux, on écrit tout simplement $2\vec{v}$. On a donc ici une notion de multiplication d'un nombre (un scalaire) par un vecteur. Une autre question, mais qu'on laisse pour plus tard, est de savoir si cela a un sens de parler de multiplication de deux vecteurs.

Précisons maintenant les opérations possible sur les scalaires. Si on a deux scalaires α et β , on s'attend à ce que l'on puisse écrire, pour un certain vecteur \vec{v} :

$$\alpha\vec{v} + \beta\vec{v} = (\alpha + \beta)\vec{v}$$

C'est à dire que l'addition de deux scalaires doit avoir un sens. Bien sûr, dans notre cas particuliers où les scalaires sont simplement des nombres réels, c'est quelque chose d'évident, mais nous voulons pouvoir donner une définition générale plus tard.

De même que pour l'addition, on peut raisonnablement s'attendre à ce qu'il ait un sens à écrire :

$$\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$$

C'est à dire que la multiplication de deux scalaires doit avoir un sens. Nous avons maintenant réuni assez d'informations pour définir la notion de vecteur de façon générale.

5.1.2 Définition

Définition 32. Un corps est la donnée d'un ensemble K et de deux lois de composition interne sur K appelées addition et soustraction notés respectivement $+$ et \cdot , tel que :

1. L'addition et la multiplication sont commutatives.
2. L'addition et la multiplication sont associatives.
3. Existence d'un élément neutre pour l'addition, noté 0 , et d'un élément neutre pour la multiplication noté 1 .
4. Existence de l'élément symétrique pour l'addition et la multiplication. Soit $\alpha \in K$, son élément symétrique pour l'addition est noté $(-\alpha)$ et est appelé son opposé, et son élément symétrique pour la multiplication est noté α^{-1} et est appelé son inverse.
5. La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On peut alors définir la notion d'espace vectoriel :

Définition 33. Soit K un corps, un K -espace vectoriel est la donnée d'un ensemble V dont les éléments sont appelés des vecteurs, et d'une loi de composition interne sur V appelé addition vectorielle et notée $+$ et d'une loi de composition externe appelée multiplication scalaire et notée \cdot , tel que :

1. L'addition vectorielle est commutative.
2. L'addition vectorielle est associative.
3. Existence d'un élément neutre pour l'addition vectorielle, noté $\vec{0}$.
4. Existence de l'élément symétrique pour l'addition vectorielle (le symétrique du vecteur \vec{v} étant noté $(-\vec{v})$).
5. Distribution scalaire :

$$\forall \lambda \in K, \forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$$

et :

$$\forall \vec{v} \in V, \forall \lambda, \mu \in K, \vec{v}(\lambda + \mu) = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$

6. Élément scalaire neutre pour la multiplication scalaire :

$$\exists e \in K : \forall \vec{v} \in V, e\vec{v} = \vec{v}$$

7. La multiplication scalaire est associative :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{v} \in V, \lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$$

Exemple. Comme nous l'avons vu, \mathbb{R}^n peut être vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. L'addition vectoriel et la multiplication scalaire sont très simplement définies comme nous l'avons vu dans notre approche intuitive.

Exemple. L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R} forme un \mathbb{R} -espace vectoriel, la multiplication scalaire et l'addition vectorielle étant simplement définies à partir de la multiplication et de l'addition dans \mathbb{R} .

5.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

5.2.1 Combinaisons linéaires

Soit V un K -espace vectoriel, supposons une collection de n vecteurs $\vec{v}_i \in V$ toute expression de la forme (qui représente bien sûr un vecteur de V) :

$$\lambda^1 \vec{v}_1 + \lambda^2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda^3 \vec{v}_3 = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{v}_i$$

où les λ^i sont n éléments de K , est appelée une *combinaison linéaire* des vecteurs \vec{v}_i . Il faut faire attention qu'il n'y a pas d'exponentiation dans la notation λ^i , le i ne sert qu'à distinguer les différents λ .

Note : pour ceux qui ne sont pas familier avec ce genre de notation pour une somme, une petite explication s'impose. Le symbole Σ est utilisé pour écrire une somme de façon abrégée. L'écriture :

$$\sum_{i=1}^n (\dots)$$

indique que l'on somme sur n termes, indicés par i , en faisant varier i entre 1 et n .

Définition 34. Soit V un K -espace vectoriel, n vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ sont dit linéairement indépendants si :

$$\forall \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n \in K, \lambda^i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$$

Dans le cas contraire, les vecteurs sont dits linéairement dépendants.

Dit autrement, toute combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants donne un vecteur autre que le vecteur nul, sauf si tout les les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

5.2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 35. Soit W un sous-ensemble d'un K -espace vectoriel V , W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\vec{0} \in W$
2. $\forall \vec{v}, \vec{u} \in W, \forall \lambda, \mu \in K, \lambda\vec{v} + \mu\vec{u} \in W$

Autrement dit, un sous-ensemble W est un sous-espace vectoriel si et seulement si le vecteur nul appartient à W , et que toute combinaison linéaire de vecteurs de W appartient encore à W .

Théorème 10. Soit V un K -espace vectoriel, W un sous-espace vectoriel de V , alors W est un K -espace vectoriel.

Il n'y a pas besoin de démonstration, il suffit de regarder la définition d'espace vectoriel pour voir que ce résultat est trivial. Il y a toutefois une légère subtilité. Un espace vectoriel n'est pas que la donnée d'un ensemble et d'un corps, mais aussi d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe. Il nous faut une loi de composition interne sur W , donc une application de $W \times W$ dans W (l'addition vectorielle). Dans le théorème, on admet implicitement que l'on «réutilise» la loi de composition interne dans V , mais ce n'est clairement pas la même puisque c'est une application de $V \times V$ dans V . Il faut donc restreindre cette application à W c'est-à-dire que si G est le graphe de la loi de composition interne sur V , alors la restriction à W a pour graphe $G \cap ((W \times W) \times W)$. Un raisonnement analogue s'applique à la multiplication scalaire.

Théorème 11. Soit V un K -espace vectoriel, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$, l'ensemble W des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de V .

Démonstration. Il suffit de vérifier les critères donnés au théorème précédent. Vérifions d'abord le deuxième critère. On a par hypothèse :

$$\forall \vec{w} \in W, \exists \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n \in K : \vec{w} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{v}_i$$

et donc :

$$\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2 = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_1^i \vec{v}_i + \beta \sum_{i=1}^n \lambda_2^i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_1^i + \beta \lambda_2^i) \vec{v}_i \in W$$

où $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ et $\alpha, \beta \in K$. On voit que $\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2$ est bien une combinaison linéaire des \vec{v}_i (avec les coefficients $\alpha \lambda_1^i + \beta \lambda_2^i$) et donc appartient à W .

Vérifions maintenant le deuxième critère. Il suffit de montrer que pour tout \vec{v} , on a $0\vec{v} = \vec{0}$ (rappelons que nous avons noté 0 l'élément neutre de l'addition dans K , et $\vec{0}$ l'élément neutre de l'addition dans V). Il faut d'abord vérifier que l'on a bien un seul élément neutre, notons \vec{e} un éventuel élément neutre différent de $\vec{0}$, on aurait alors :

$$\vec{e} = \vec{e} + \vec{0} = \vec{0}$$

L'élément neutre est donc unique. On a donc :

$$\vec{v} + 0\vec{v} = (1 + 0)\vec{v} = \vec{v}$$

et donc en additionnant par l'élément symétrique $-\vec{v}$ de \vec{v} , on obtient immédiatement $0\vec{v} = \vec{0}$. Le deuxième critère est donc prouvé (on a en effet $\vec{0} = \sum_i 0\vec{v}_i \in W$) ce qui achève la démonstration.

On dit (dans le cas du théorème) que les vecteurs \vec{v}_i engendrent V si $W = V$, sinon on dit que le sous-espace W est engendré par les vecteurs \vec{v}_i .

5.2.3 Base

Définition 36. Soit V un K -espace vectoriel, on dit que les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ forment une base de V si et seulement si ils sont linéairement indépendants et s'ils engendrent V .

Ce qui nous amène au théorème suivant :

Théorème 12. Soit V un K -espace vectoriel, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de V , et $\vec{v} \in V$ un vecteur, alors il existe un et un seul ensemble de n scalaires $\{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n\}$ tel que :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$$

Démonstration. Tout d'abord, comme $\{\vec{e}_i\}$ est une base, alors par définition n'importe quel vecteur de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{e}_i , il existe donc au moins un ensemble de scalaires $\{\lambda^i\}$. Montrons qu'il n'en existe pas d'autre. Supposons en effet le contraire. On aurait un ensemble $\{\mu^i\}$ différent de l'ensemble $\{\lambda^i\}$, tel que :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \mu^i \vec{e}_i$$

Mais alors on aurait :

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i - \sum_{i=1}^n \mu^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (\lambda^i - \mu^i) \vec{e}_i$$

Mais alors les vecteurs \vec{e}_i ne seraient pas linéairement indépendants ce qui contredirait notre hypothèse qu'ils constituent une base.

Puisque cet ensemble de scalaires est unique, on va convenir d'appeler les λ^i les composantes de \vec{v} dans la base $\{\vec{e}_i\}$. L'écriture :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$$

est appelé le *développement* de \vec{v} sur la base $\{\vec{e}_i\}$. On écrit alors parfois :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix}$$

Écriture bien sûr un peu abusive puisqu'elle n'a de sens que dans une base précise de V .

Théorème 13. Soit V un K -espace vectoriel, $\{\vec{e}_i\}$ une base de V comportant n vecteurs, et $\{\vec{f}_j\}$ un ensemble de m vecteurs linéairement indépendants. Alors $m \leq n$.

Démonstration. Comme $\{\vec{e}_i\}$ est une base de V , on peut développer l'un des \vec{f}_j (disons par exemple \vec{f}_1) sur cette base :

$$\vec{f}_1 = \sum_{i=1}^n \lambda^i \vec{e}_i$$

Comme les λ^i ne sont pas tous nuls, on peut supposer (quitte à ré-indexer) que $\lambda^1 \neq 0$, et donc on peut exprimer \vec{e}_1 comme un combinaison linéaire des autres vecteurs \vec{e}_i et de \vec{f}_1 :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\lambda^1} \vec{f}_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda^i}{\lambda^1} \vec{e}_i$$

Choisissons maintenant un vecteur quelconque $\vec{v} \in V$. On doit pouvoir le développer sur la base $\{\vec{e}_i\}$, on a alors :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i = v^1 \left[\frac{1}{\lambda^1} \vec{f}_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda^i}{\lambda^1} \vec{e}_i \right] + \sum_{i=2}^n v^i \vec{e}_i = \frac{v^1}{\lambda^1} \vec{f}_1 + \sum_{i=2}^n \left(v^i - \frac{v^1 \lambda^i}{\lambda^1} \right) \vec{e}_i$$

Ce qui montre qu'un vecteur quelconque de V peut toujours s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{f}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Ces vecteurs engendrent donc V .

On peut continuer de la même manière, et remplacer \vec{e}_2 par \vec{f}_2 et obtenir encore un ensemble de vecteurs qui engendrent V , puis de même en remplaçant \vec{e}_3 par \vec{f}_3, \dots , et ainsi de suite. Raisonnons par récurrence en supposant $m > n$, et montrons que l'on arrive à une contradiction. Supposons que nous ayons formé l'ensemble $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, qui engendre V . Comme il engendre V , on doit pouvoir écrire :

$$\vec{f}_{k+1} = \sum_{i=1}^k \mu^i \vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^n \nu^i \vec{e}_i$$

On ne peut pas avoir tout les ν^i nuls, sinon on aurait exprimé \vec{f}_{k+1} comme une combinaison linéaire des autres vecteurs \vec{f}_i , ce qui contredirait notre hypothèse. On peut donc supposer $\nu^{k+1} \neq 0$ quitte à ré-indexer. On peut alors exprimer \vec{e}_{k+1} comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{f}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n$:

$$\vec{e}_{k+1} = \frac{1}{\nu^{k+1}} \vec{f}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\mu^i}{\nu^{k+1}} \vec{f}_i - \sum_{i=k+2}^n \frac{\nu^i}{\nu^{k+1}} \vec{e}_i$$

Comme $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ engendre V , on doit pouvoir écrire pour $\vec{v} \in V$ quelconque :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k v^i \vec{f}_i + \sum_{i=k+1}^n v^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^k v^i \vec{f}_i + \sum_{i=k+2}^n v^i \vec{e}_i + v^{k+1} \left[\frac{1}{\nu^{k+1}} \vec{f}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\mu^i}{\nu^{k+1}} \vec{f}_i - \sum_{i=k+2}^n \frac{\nu^i}{\nu^{k+1}} \vec{e}_i \right]$$

Soit :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \left(v^i - \frac{\nu^{k+1} \mu^i}{\nu^{k+1}} \right) \vec{f}_i + \frac{\nu^{k+1}}{\nu^{k+1}} \vec{f}_{k+1} + \sum_{i=k+2}^n \left(v^i - \frac{\nu^{k+1} \nu^i}{\nu^{k+1}} \right) \vec{e}_i$$

Ce qui montre bien que l'ensemble $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \dots, \vec{e}_n\}$ engendre V . Comme on a supposé (par l'absurde) que $m > n$, on en arrive à former l'ensemble $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ qui engendre V . Mais alors on doit avoir que \vec{f}_{n+1} doit pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, ce qui contredit notre hypothèse. On a donc bien $m \leq n$ ce qui achève la démonstration.

Théorème 14. Soit V un K -espace vectoriel, $\{\vec{e}_i\}$ une base de V comportant n vecteur, et $\{\vec{f}_j\}$ une autre de base de V comportant m vecteurs, alors $n = m$.

Démonstration. Par le théorème précédent, appliqué à chacune des base, on doit avoir à la fois $n \leq m$ et $n \geq m$, donc on a $m = n$.

On a donc, pour un espace vectoriel donné, un nombre particuliers (le nombre de vecteurs dans une de cet espace vectoriel), que l'on va appeler la *dimension* de cet espace. Si l'espace vectoriel V a pour dimension n , on va noter :

$$n = \dim(V)$$

Exemple. \mathbb{R}^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension deux. En effet, il est facile de voir que $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ forment une base. En effet, un élément quelconque de \mathbb{R}^2 s'écrit (a, b) , qui peut être développée sur cette base : $(a, b) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. Par un raisonnement similaire, on peut facilement voir que \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

Considérons maintenant le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . On peut voir intuitivement qu'aucun ensemble fini de ces fonctions ne peut engendrer l'espace vectoriel. En effet, dans une base hypothétique de cet espace, avec un nombre fini d'éléments, si certains vecteurs de base sont des fonctions polynomiales, alors il y a une de ces fonctions polynômes dont le degré p est supérieur ou égale à celui de toutes les autres. On voit mal alors comment on pourrait développer une fonction polynôme de degré $q > p$ sur cette base.

De tels espaces vectoriels seront alors dit de dimension infinie. Sauf mention contraire, nous travaillerons toujours avec des espaces vectoriels de dimension finie.

5.3 Produit scalaire et espace dual

5.3.1 Introduction

Nous allons dans la suite utiliser la *convention d'Einstein*, qui nous permet d'omettre le signe de sommation : on va convenir que tout symbole à la fois en indice et en exposant

est un indice de sommation. Par exemple, le développement d'un vecteur \vec{v} sur une base $\{\vec{e}_i\}$ va s'écrire :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i = v^i \vec{e}_i$$

Et on conviendra d'utiliser la même lettre pour la notation d'un vecteur et de ses composantes (par exemple les composantes de \vec{v} seront toujours, sauf mention contraire, notée v^i).

Nous allons définir une nouvelle opérations, valable sur les \mathbb{R} -espaces vectoriels (en fait pas seulement mais nous allons ici nous restreindre à ce cas). Cette opération, appelée *produit scalaire*, va faire correspondre à tout couple de vecteur un nombre réel.

5.3.2 Définition

Définition 37. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel, un produit scalaire sur V , est une fonction de $V \times V$ dans \mathbb{R} , que l'on note $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ou $\vec{v} \cdot \vec{u}$, telle que :

1. $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ (commutativité)
2. $\forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda \vec{v} + \mu \vec{u}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{v} \cdot \vec{w} + \mu \vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéarité)

Choisissons une base de V , qu'on va noter $\{\vec{e}_i\}$, et définissons sur V un produit scalaire. Supposons que nous connaissions tout les produits scalaires entre les différents vecteurs de la base, notons alors g_{ij} le produit scalaire du vecteur \vec{e}_i par le vecteur \vec{e}_j :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Notez que le produit scalaire est commutatif, on doit avoir $g_{ij} = g_{ji}$.

Soit alors deux vecteurs, $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ et $\vec{u} = u^j \vec{e}_j$, leur produit scalaire peut s'écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v^i \vec{e}_i) \cdot (u^j \vec{e}_j) = v^i u^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = g_{ij} v^i u^j$$

Ce qui montre que la connaissances des nombres g_{ij} suffit pour calculer le produit scalaire entre deux vecteurs quelconques. Il faut faire attention aussi que dans la formule $\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{ij} v^i u^j$, il y a une sommation sur deux indices : i et j . Prenons un exemple à deux dimensions :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{ij} v^i u^j = g_{11} v^1 u^1 + g_{12} v^1 u^2 + g_{21} v^2 u^1 + g_{22} v^2 u^2$$

Définition 38. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, ce produit scalaire est dit non-dégénéré si on a :

$$\forall \vec{v} \in V, (\forall \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = 0) \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

Ce n'est pas toujours le cas. Supposons, en utilisant encore les produits scalaires des vecteurs de base g_{ij} , que l'on ait (on se met en dimension deux) $g_{11} = -1, g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$, alors, le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même donne :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{ij} v^i v^j = -1 v^1 v^1 + 1 v^2 v^2 = 0$$

Définition 39. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, le produit scalaire est dit défini positif si :

$$\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$$

Dans le cas où le produit scalaire est défini positif, on appelle la *norme* d'un vecteur \vec{v} la quantité :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Soient deux vecteurs \vec{v} et \vec{u} , ils sont dit *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul : $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

Ceci nous amène alors à la définition de *base orthonormée*. Une base orthonormée est une base constituée de vecteurs normés (i.e. de norme un) et telles que deux vecteurs de bases différents soient toujours orthogonaux. Autrement dit, les nombres g_{ij} sont donnés par : $g_{ij} = 1$ pour $i = j$, et $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Dans cette base, le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ et $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$ se calcule très facilement :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{ij} v^i u^j = \sum_i v^i u^i$$

Par exemple, dans une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , notons cette fois (x_v, y_v, z_v) les composantes de \vec{v} et (x_u, y_u, z_u) les composantes de \vec{u} , alors on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u$$

5.3.3 Espace dual

Définition 40. Soit V un K -espace vectoriel, l'espace dual de V , noté V^* , est l'ensemble des applications ω de V dans K qui sont linéaires, c'est à dire telles que :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{v}, \vec{u} \in V, \omega(\lambda \vec{v} + \mu \vec{u}) = \lambda \omega(\vec{v}) + \mu \omega(\vec{u})$$

La linéarité des éléments de l'espace dual nous permet de calculer son action sur un vecteur quelconque, connaissant son action sur les vecteurs de base. En effet, on a :

$$\omega(\vec{v}) = \omega(v^i \vec{e}_i) = v^i \omega(\vec{e}_i) = v^i \omega_i$$

en posant $\omega_i = \omega(\vec{e}_i)$.

Théorème 15. Soit V un K -espace vectoriel, l'espace dual de V est aussi un K -espace vectoriel, si l'addition et la multiplication scalaire sont définies par :

1. $\forall \vec{v} \in V, \forall \omega, \eta \in V^*, (\omega + \eta)(\vec{v}) = \omega(\vec{v}) + \eta(\vec{v})$
2. $\forall \lambda \in K, \forall \vec{v} \in V, \forall \omega \in V^*, (\lambda \omega)(\vec{v}) = \lambda(\omega(\vec{v}))$

Il suffit de vérifier les critères pour avoir un espace vectoriel pour voir que c'est évident. Par exemple, il est clair que la combinaison linéaire de deux éléments de V^* est encore un élément de V^* . Comme V^* est un espace vectoriel, ses éléments seront appelés *vecteurs duaux*.

On a écrit précédemment l'action d'un vecteur dual sur un vecteur : $\omega(\vec{v}) = v^i \omega_i$ avec $\omega_i = \omega(\vec{e}_i)$. Définissons alors la *base duale* $\{\theta^i\}$ de la base $\{\vec{e}_i\}$ en demandant que l'on ait :

$$\theta^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i$$

où δ_j^i est le *symbole de Kronecker* qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. On a alors :

$$\omega(\vec{v}) = v^i \omega_i = v^j \omega_j \delta_j^i = v^j \omega_j \theta^i(\vec{e}_j) = \omega_i \theta^i(v^j \vec{e}_j) = \omega_i \theta^i(\vec{v})$$

On a donc :

$$\omega = \omega_i \theta^i$$

Ce qui justifie l'appellation de base duale, puisque tout vecteur dual peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs duaux $\{\theta^i\}$ et que les vecteurs duaux sont linéairement indépendants. Pour montrer ce dernier point, notons d'abord que le vecteur nul de V^* est l'application qui à tout $\vec{v} \in V$ associe le nombre zéro. Construisons alors une combinaison linéaire des vecteurs de la base duale, faisons là agir sur un vecteur $\vec{v} \in V$ quelconque, et demandons que cette combinaison linéaire soit le vecteur nul :

$$\lambda_i \theta^i(v^j \vec{e}_j) = \lambda_i v^j \delta_j^i = \lambda_i v^i = 0$$

Comme ceci doit être vrai pour tout $\vec{v} \in V$, on doit avoir tout les λ_i nuls. $\{\theta^i\}$ est donc bien une base de V^* , et on voit immédiatement qu'il y a autant de vecteurs (duaux) dans la base duale qu'il y en a dans la base de départ $\{\vec{e}_i\}$. On a donc déjà prouvé le théorème suivant :

Théorème 16. *Soit V un K -espace vectoriel, et V^* son dual, alors on a :*

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

On peut maintenant s'intéresser au dual du dual V^{**} . On peut identifier chaque vecteur de V avec un vecteur de V^{**} . En effet, soit $\vec{v} \in V$, $\omega \in V^*$, et $\bar{v} \in V^{**}$ que l'on identifie à \vec{v} , on peut écrire :

$$\omega(\vec{v}) = \bar{v}(\omega)$$

On peut donc assimiler V à V^{**} . Cela veut dire donc que V est le dual de V^* . Dans nos notations, nous avons mis une flèche sur les vecteurs, et non sur les vecteurs duaux pour les différencier. Mais on voit ici que l'on aurait très bien pu inverser les rôles : cette notation ne doit pas faire croire que les éléments de V et de V^* ne sont pas sur un pied d'égalité.

Lien avec le produit scalaire

Supposons que sur V on ait défini un produit scalaire. Alors, à chaque vecteur \vec{v} on peut faire correspondre un et seul vecteur dual v défini par :

$$\forall \vec{u} \in V, v(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

On peut donc établir dans ce cas une bijection entre V et V^* . Soit alors v_i les composantes du vecteur dual correspondant au vecteur $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$, alors on peut écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v(\vec{u}) = v_i \theta^i(u^j \vec{e}_j) = v_i u^j \delta_j^i = v_i u^i$$

Chapitre 6

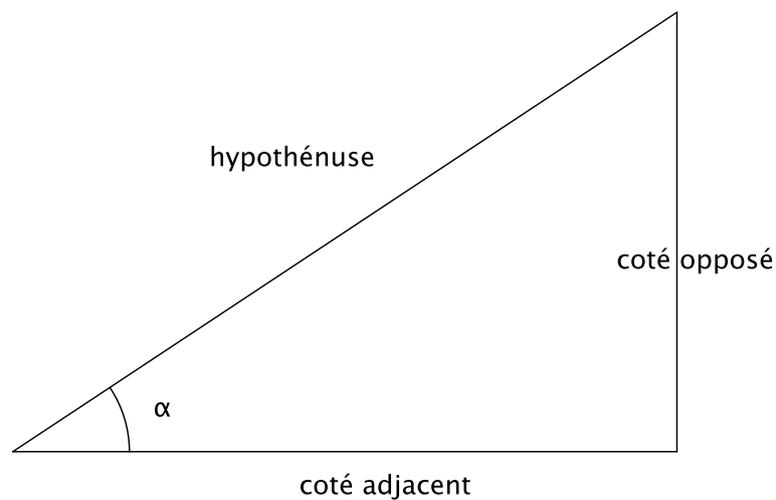
Trigonométrie

6.1 Introduction

La trigonométrie vient du grec «trigonos» : «triangulaire» et du grec «métron» : «mesure», la trigonométrie se base sur des relations entre les angles et les mesures des cotés dans les triangles. C'est une science mathématique très ancienne qui date de l'antiquité.

6.1.1 Le sinus d'un angle

On considère un triangle rectangle et l'un de ses angles aigus que l'on va appeler α :



On voit sur le dessin que :

1. l'*hypoténuse* est le coté opposé à l'angle droit qui est aussi le plus grand coté du triangle rectangle,
2. le *coté opposé* est le coté opposé à l'angle α ,
3. le *coté adjacent* est l'un des coté formant l'angle α et qui n'est pas l'hypoténuse.

Si on prend plusieurs triangles rectangles différents mais qui ont tous un angle identique (hors l'angle droit) on peut remarquer quelque chose d'intéressant. Lorsque l'on divise le côté opposé par l'hypoténuse, on obtient toujours la même valeur. Cette propriété découle du fait que tout les triangles rectangle ayant un angle identique sont des triangles semblables.

Imaginons que nous ayons un angle α dans un triangle rectangle disons par exemple de 30 degrés. On divise le côté opposé par l'hypoténuse et on trouve comme valeur 0,5. On est alors assuré, à cause de la remarque précédente, que si on a n'importe quel triangle rectangle avec un angle de 30 degrés, alors la division du côté opposé par l'hypoténuse donne 0,5.

On peut donc dire que puisque le résultat de cette division ne dépend que de l'angle et non du triangle, on peut associer à chaque valeur valeur possible d'un angle le nombre qui est le résultat de cette division. Par exemple, on a dit que pour un angle de 30 degrés ce nombre vaut 0,5. On va noter ce fait de manière mathématique comme ceci :

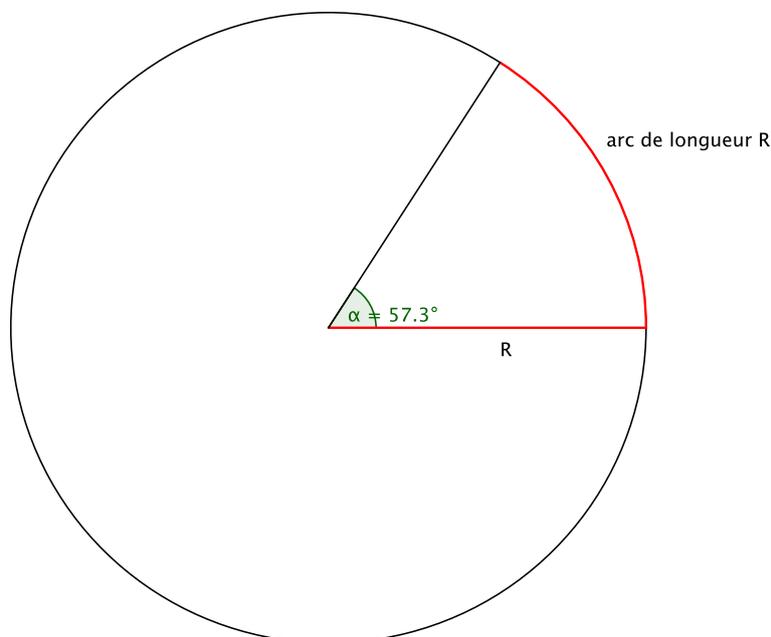
$$\sin(60^\circ) = 0,5$$

Et on dit que le *sinus* de 30 degrés est 0,5.

6.1.2 Introduction au concept de radian

Pour mesurer des angles, vous avez sans doute l'habitude de travailler avec des degrés comme unité. En trigonométrie, nous n'allons pas utiliser cette unité, nous allons utiliser les radians.

Considérons la figure ci-dessous. On a un cercle de rayon R . Si on considère un arc de cercle de longueur R , on peut construire un angle qui vaut (par définition) un radian.



La circonférence d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$. Un angle d'un radian intercepte donc un arc de cercle d'une longueur de $1/(2\pi)$ fois la circonférence, qui correspond à un angle de 360 degrés, donc un radian vaut :

$$1^c = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Le symbole « c » en exposant est l'analogie du symbole «degré» pour les radians.

Le radian est très utilisé en trigonométrie.

6.2 Fonctions trigonométriques

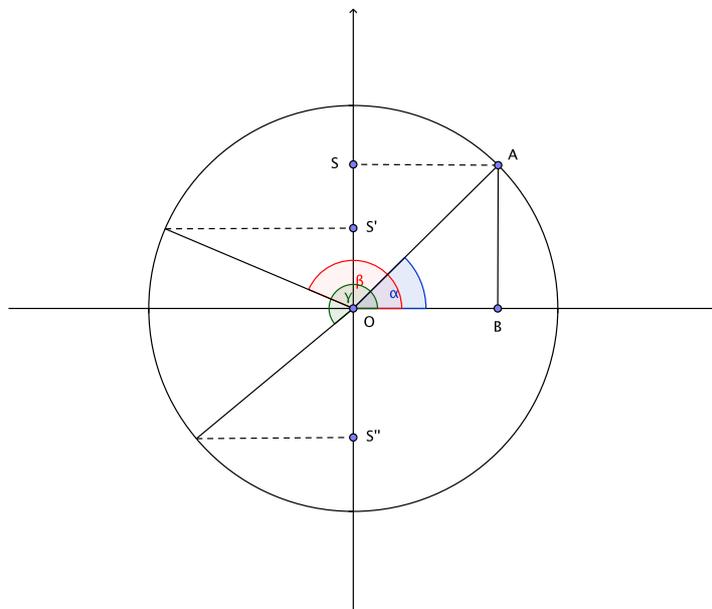
6.2.1 Fonction sinus

À partir de ce que nous avons vu nous allons définir une fonction : la fonction sinus.

Cette fonction se définit à partir de ce que nous avons dit dans l'introduction. Cependant, on faisait le lien entre un angle et un nombre, et on veut une fonction qui donne un nombre en fonction d'un autre nombre. On doit donc fixer une unité pour les angles et nous utiliserons le radian.

On a quand même un problème. En faisant comme ça, on définit le sinus uniquement pour des angles strictement compris entre 0 et $\pi/2$ radians (c'est à dire entre 0 et 90 degrés). On voudrait étendre la définition pour qu'on puisse calculer le sinus de n'importe quel nombre.

Considérons la figure suivante :



Nous avons un cercle de rayon 1, dans lequel se trouve le triangle OAB dont l'un des angles est α . Le sinus de cet angle est comme nous l'avons vu, le côté opposé divisé par l'hypoténuse, c'est à dire :

$$\sin \alpha = \frac{|AB|}{|OA|} = |AB| = |OS|$$

Car $|OA| = 1$ (cercle de rayon 1), il en résulte que si on construit (de la bonne manière!) l'angle dans un cercle unité, il suffit de faire une projection sur l'axe y pour avoir la valeur du sinus de l'angle.

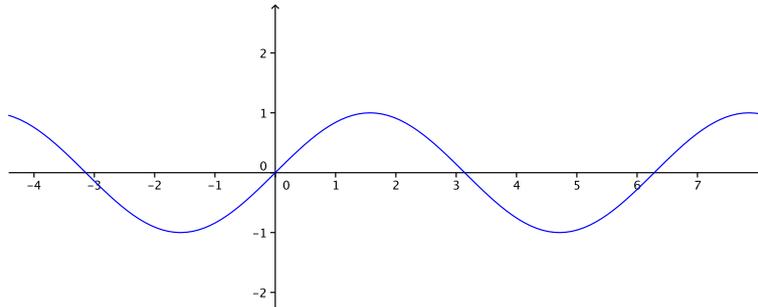
Considérons maintenant un angle $\beta > \pi/2$. On ne peut pas définir son sinus à partir d'un triangle rectangle, mais dans le triangle trigonométrique, on peut le définir en appliquant la même méthode que précédemment, on a donc :

$$\sin \beta = |OS'|$$

Par contre, dans le cas d'un angle $\gamma > \pi$, on a un sinus négatif (car on est dans les valeurs négatives de y) et donc :

$$\sin \gamma = -|OS''|$$

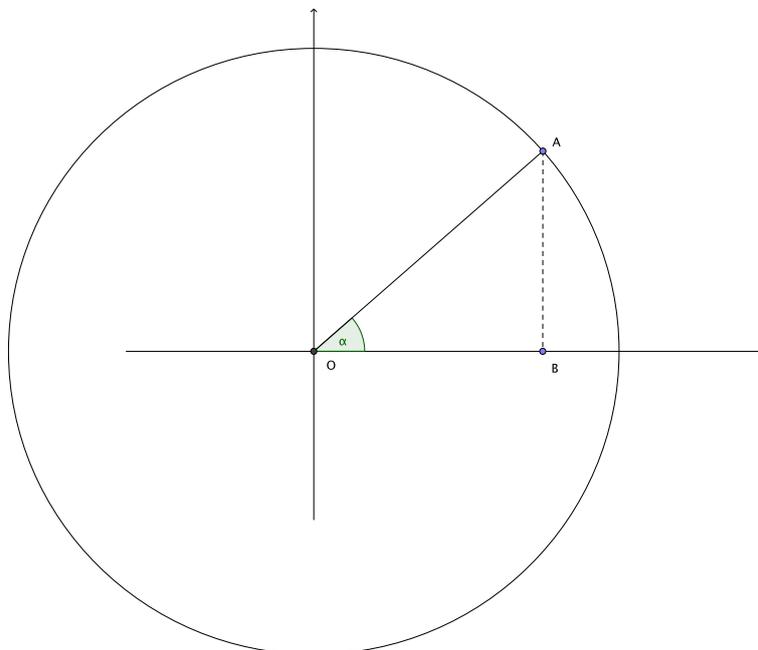
Que se passe-t'il pour des angles supérieurs à 2π (360°)?? Et bien c'est simple : on est près pour un deuxième tour de cercle! Ainsi, au fur et à mesure que l'on augmente la valeur de l'angle, on va tourner dans le cercle de sorte que l'on retrouvera ainsi les mêmes valeurs pour la fonction sinus : on dit que la fonction est périodique. Cela est bien visible en regardant son graphe :



6.2.2 Fonction cosinus

Nous avons introduit la fonction sinus à l'aide des triangles rectangles, on divisait le côté opposé par l'hypothénuse. On peut aussi diviser le côté adjacent par l'hypothénuse : on calcule alors le *cosinus*.

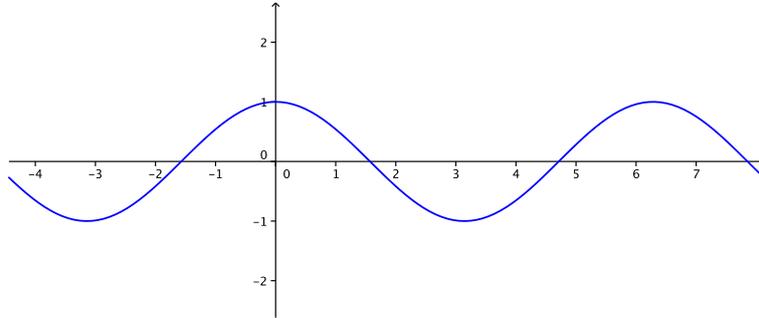
On peut très facilement se rendre compte qu'il suffit de projeter sur l'axe Ox dans le cercle trigonométrique :



On a :

$$\sin \alpha = |OB|$$

Les mêmes remarques que pour la fonction sinus s'appliquent encore ici. Le graphe de la fonction cosinus est semblable à celui de la fonction sinus, à une translation près :



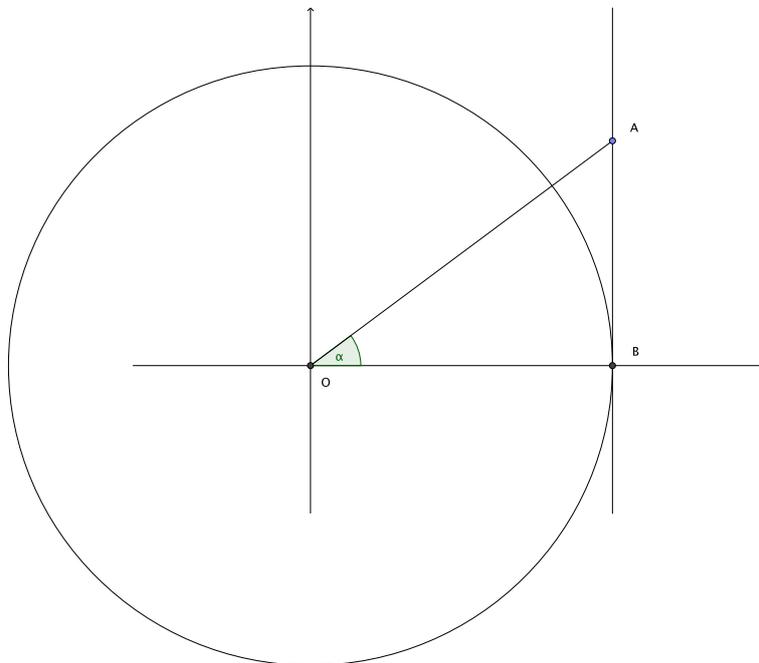
6.2.3 Fonction tangente

La *tangente* d'un angle dans un triangle rectangle est le rapport du côté opposé sur le côté adjacent.

Sur le schéma ci-dessous, on a :

$$\tan \alpha = \frac{|AB|}{|OB|} = |AB|$$

On projette donc sur une droite verticale tangente au cercle au point $B = (1, 0)$.



On peut prouver que :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

En effet :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\text{cote oppose}}{\text{hypotenuse}}}{\frac{\text{cote adjacent}}{\text{hypotenuse}}} = \frac{\text{cote oppose}}{\text{cote adjacent}} = \tan \alpha$$

Chapitre 7

Analyse

7.1 Introduction

7.1.1 Les paradoxes de Zénon d'Elée

Zénon d'Elée était un philosophe grec né vers -495. Il était l'élève de Parménide et soutenait sa doctrine : Parménide pensait que tout mouvement est impossible ou n'est qu'illusion. C'était une conclusion basée sur des raisons assez étranges, sur l'unicité de l'Être : Parménide affirme que la pluralité n'existe pas et par conséquent le mouvement non plus.

Zénon va tenter de prouver ce point de vue en énonçant plusieurs paradoxes sur le mouvement des corps. Le plus connu de ces paradoxes (et le plus difficile à résoudre) est le fameux paradoxe d'Achille et de la tortue.

Ces paradoxes sont nombreux et sont pour la plupart assez faciles à réfuter. Voici trois des plus célèbres de ces paradoxes :

1. Le paradoxe d'Achille et de la tortue que nous analyserons plus loin,
2. Le paradoxe de la pierre lancée vers un arbre : une pierre lancée vers un arbre ne pourra jamais l'atteindre car avant cela elle devra parcourir la moitié du parcours, mais pour cela elle devra d'abord parcourir la moitié de cette distance (donc le quart de la distance totale), et ainsi de suite : la flèche n'atteindra jamais son objectif (remarque : ce paradoxe est fondamentalement identique au précédent comme nous le verrons),
3. Enfin, le paradoxe de la flèche en vol : imaginons une flèche en vol. A chaque instant, elle occupe une position bien précise et si on l'observe la flèche sur un seul instant infiniment bref, elle n'a pas le temps de bouger, et une succession de position fixes ne peut engendrer un mouvement : la flèche ne peut donc pas bouger ! (on reparle de ce paradoxe dans la partie «Fonction dérivée» de ce cours).

Il faut remarquer que ces «paradoxes» sont a proprement parler des sophismes.

7.1.2 Qu'est ce que l'analyse ?

L'analyse mathématique est l'étude rigoureuse du «calcul infinitésimal». Les termes d'«analyse» et de «calcul infinitésimal» sont en fait des synonymes, le premier terme étant plus moderne et tendant à remplacer le second. Mais l'expression «calcul infinitésimal» n'a pas seulement un intérêt historique, il a aussi un certain intérêt pédagogique.

En effet, il faut essayer de comprendre qu'est ce que l'on entend par «infinitésimal». Pour le comprendre, nous allons adopter un point de vue historique et discuter de la forme la plus ancienne de «calcul infinitésimal», ou plus exactement, quelque chose qui y ressemble : c'est la méthode d'exhaustion, utilisée par les grecques durant l'antiquité.

Cette méthode était par exemple utilisée pour calculer la surface d'un disque. On encadrait un disque en construisant un polygone régulier à l'intérieur du disque, et un autre englobant le disque. En calculant les surfaces respectives de ces deux polygones, on savait que la surface du disque était quelque part entre ces deux valeurs. Puis, en augmentant le nombre de côtés de deux polygones, on approchait de plus en plus de la surface, et l'encadrement devenait de plus en plus précis.

La chose intéressante est qu'il est possible de déduire la surface exacte du disque. Il suffit en effet d'augmenter le nombre de côtés à l'«infini», c'est à dire que l'on considère un cercle comme un polygone régulier ayant un nombre infini de côtés, chacun de ces côtés ayant une longueur nulle. On pourrait croire qu'une telle chose est impossible à calculer mais nous verrons qu'il n'en est rien.

La suite du chapitre a donc deux buts : formaliser ce genre de raisonnement, et comprendre mieux les pièges et les subtilités que l'on rencontre lorsque l'on parle d'infini.

7.2 Intervalles dans l'ensemble des réels

7.2.1 Définition

On va définir maintenant la notion d'intervalle. Une définition intuitive de cette notion est simplement l'ensemble des valeurs comprises entre deux valeurs distinctes. Il faut simplement faire attention de savoir si ces deux valeurs sont comprises ou non dans l'intervalle.

Par exemple, si on dit : «l'ensemble des nombres réels entre 2 et 3 compris», on écrit :

$$[2, 3]$$

et si on exclu 2 et 3 de cet ensemble, on écrit plutôt : $]2, 3[$ on peut aussi exclure 2 et inclure 3 :

$$]2, 3]$$

ou l'inverse :

$$[2, 3[$$

Il est possible de définir plus rigoureusement cette notion à l'aide ce que nous avons appris en théorie des ensembles :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Les intervalles de type $[a, b]$ sont dits *fermés*, les intervalles de type $]a, b[$ sont dits *ouverts* et les intervalles comme $]a, b]$ ou $[a, b[$ sont dits *semi-ouverts*.

Le symbole ∞ , qui représente l'«infini» est utile pour représenter certains intervalles. Par exemple, on note l'ensemble des nombres «supérieurs ou égaux à deux» : $[2, +\infty[$, l'ensemble des nombres strictement inférieurs à 4 est $] - \infty, 4[$.

On rajoute donc aux définitions faites plus haut :

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

7.2.2 Propriétés

On peut montrer que :

1. l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle, par exemple $]-\infty, 10] \cap [2, 20] = [2, 20]$,
2. l'union de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle, par exemple $[0, 1] \cup [3, 4]$ n'est pas intervalle.

7.3 Achille et la tortue

7.3.1 Énoncé

Le paradoxe est facile à énoncer. Imaginez une course que se disputent Achille et la tortue. Achille qui sait bien qu'il part avec un avantage certain sur son adversaire lui laisse une avance de 100 mètres. La course commence. Pour rattraper son retard, il parcourt les cent mètres qui le séparent de la tortue. Pendant ce temps, la tortue a elle même avancé d'une certaine distance, qu'Achille doit combler à nouveau. Une fois ce retard comblé, la tortue avance à nouveau d'une certaine distance, etc,... Achille ne rattrape donc jamais la tortue.

On va donc tenter de résoudre ce paradoxe mathématiquement. Tout d'abord, on va supposer qu'Achille parcourt le cent mètres en dix secondes, et que la tortue parcourt un mètre en une seconde :

1. Durant les dix premières secondes, Achille a parcouru 100 m et la tortue a parcouru 10 m, il est donc à 10 m de la tortue (temps écoulé : 10 s),

2. Pour parcourir cette distance, Achille met une seconde, temps pendant lequel la tortue avance d'un mètre (temps écoulés : $10+1=11$ s),
3. Pour parcourir ce mètre, Achille met 0.1 s, la tortue avance donc de 10 cm (temps écoulé : $11+1/10$)
4. etc...

On peut écrire alors que le temps total pour qu'Achille rejoigne la tortue est :

$$t = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Cette somme comporte un nombre infini de termes : elle ne s'arrête jamais. Zénon en conclut que le résultat est alors infini : Achille ne rejoindra jamais la tortue.

Autrement dit, Il fait l'hypothèse que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty$$

quel que soit la valeur des a_i : une somme est infinie dès qu'il y a un nombre infini de termes (tous positifs évidemment).

7.3.2 Résolution du paradoxe : première approche

Pour résoudre le problème, on peut d'abord remarquer que la somme peut s'écrire autrement : on l'écrira avec des nombres décimaux :

$$t = 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots = 11.111111\dots$$

On voit que l'on arrive à un résultat parfaitement fini!!

Donc l'hypothèse de Zénon semble être fautive bien qu'elle est intuitive, on voit que l'on peut avoir *une somme infinie de terme avec un résultat fini!*

Maintenant nous allons tenter de résoudre le paradoxe. Pour cela, on va essayer déterminer en combien de temps Achille va rattraper la tortue, mais d'une tout autre manière que Zénon.

Après un certain temps t , Achille aura parcouru une distance $d_{ach} = v_{ach}t$ (car on a $v_{ach} = \frac{d_{ach}}{t}$ par définition de la vitesse) tandis que la tortue aura parcouru une distance $d_{tor} = v_{tor}t$ et sera donc à $d_{tor} = v_{tor}t + 100$ du point de départ d'Achille.

Achille rejoindra la tortue lorsque $d_{ach} = d_{tor}$, donc on aura, d'après les équations précédentes :

$$v_{ach}t = v_{tor}t + 100$$

Nous connaissons v_{ach} et v_{tor} , et nous savons que :

$$v_{ach} = 10v_{tor}$$

et donc :

$$10v_{tor}t = v_{tor}t + 100$$

c'est une simple équation du premier degré en t qui donne :

$$t = \frac{100}{9v_{tor}}$$

Dans notre cas, $v_{tor} = 1m/s$ et donc $t = \frac{100}{90} = 11.111\dots$

Intéressons nous donc cette fameuse somme de plus près...

7.4 Suites numériques

7.4.1 Définissons la notion de suite

Si cette somme reste finie, c'est parce que les termes se rapprochent de plus en plus de zéro (et suffisamment vite) :

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

On peut associer un nombre n à chaque terme de la suite, pour dire que le terme a_n est le n -ième terme de la suite (ce genre de notation a été déjà vu précédemment) :

$$a_1 = 10, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{10}, \dots, a_n = \frac{1}{10^{n-2}}$$

$\frac{1}{10^{n-2}}$ est le n -ième terme de la suite.

Le fait que cette suite se rapproche de zéro sera discuté plus tard. Avant cela, je propose de préciser ce que l'on doit entendre par «suite». Ouvrons donc une petite parenthèse, et définir correctement la notion de suite :

Définition 41. Une suite numérique est une fonction $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ c'est à dire qu' à chaque nombre naturel n , on fait correspondre un réel a_n qui est le n -ième terme de la suite. Elle est notée a_1, a_2, a_3, \dots ou plus simplement $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Voici quelques exemples de suite :

1. $a_n = 1 + n$ ce qui donne : 2, 3, 4, 5, ...
2. $a_n = 2^n$ ce qui donne : 2, 4, 8, 16, ...
3. Suite de Fibonacci : $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ce qui donne : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

On peut aussi définir deux ou trois choses simples sur les suites :

1. Une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

et strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

2. Une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

et strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

3. On dit qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante, et qu'elle est strictement monotone si elle strictement (dé)croissante.
4. Une suite est bornée supérieurement si on peut trouver un réel α tel que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \alpha$
5. Une suite est bornée inférieurement si on peut trouver un réel α tel que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq \alpha$
6. Enfin, une suite est bornée si elle est à la fois bornée supérieurement et inférieurement.

Exemples :

1. La suite de Fibonacci est croissante, donc monotone, elle est bornée inférieurement.
2. La suite $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ n'est pas monotone, elle est bornée.
3. La suite $a_n = 5 - \frac{1}{n}$ est croissante et bornée.

7.4.2 Introduction au concept de limite

Nous avons dit que la suite qui nous préoccupait se rapproche de zéro. Notons au passage qu'elle est strictement décroissante et bornée. Mais ce qui nous intéresse surtout dans le fait qu'elle soit bornée ; c'est qu'elle est bornée *inférieurement*. Pourtant, elle est décroissante, mais elle ne va jamais en dessous (ni n'atteint !) une certaine valeur : zéro.

En supposant *n ÉNORMÉMENT GRAND*, a_n sera *TRÈS PROCHE* de zéro. Pourtant, *il ne l'atteindra jamais*, zéro sera une limite.

Et on ne peut pas prendre 0.0000000001 comme limite, ni même 10^{-1000} car on pourra toujours trouver un nombre n assez grand, tel que a_n soit plus proche de zéro que cette limite (qui du coup n'en n'est pas vraiment une).

On dira donc, que lorsque *n tend vers l'infini*, a_n tend vers zéro, et on notera :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

On peut trouver d'autres suites intéressantes. Par exemple, pour la suite $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ la suite est croissante et tend vers 1 :

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

et on peut donc écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

Imaginons une suite qui tende vers un nombre a . Prenons un terme a_n tel que n soit très très grand (mais vraiment très!). Cela veut dire que la «distance» entre a_n et a est TRÈS petite (presque nulle) :

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Où :

$$\epsilon > 0$$

et ce fameux ϵ est choisi TRÈS petit pour montrer que cette distance entre a_n et a est vraiment infime.

On peut aussi prendre un autre nombre a_n , mais où cette fois n est encore plus grand, et choisir un ϵ encore plus petit et ainsi de suite mais ça ne servira à rien et cela va nous mener loin !

Pourtant l'idée d' écrire :

$$|a_n - a| < \epsilon$$

avec :

$$\epsilon > 0$$

pour montrer que a est la limite de la suite ne semble pas mauvaise mais il faut améliorer. Comment ? On ne peut pas examiner chaque a_n séparément et trouver à chaque fois un ϵ adéquat. Pourtant, on peut le faire implicitement à l'aide du quantificateur universel ! Ça donne :

Définition 42. Une suite numérique $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite a si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{N} : n > \delta \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Explications : On commence par dire que l'on peut prendre n'importe quel $\epsilon > 0$ (sous entendu : aussi petit soit-il), et dire qu' il existe un nombre (représenté par la lettre grecque δ) tel que si on prend un nombre n plus grand que δ , la distance entre a_n et a est plus petite que ϵ .

Prenons, par exemple, la suite $a_n = \frac{1}{n}$ (qui admet 0 comme limite) et commençons par choisir un nombre ϵ positif (assez petit), disons, $\frac{1}{100}$. Puis, examinons l'un après l'autre les termes de la suite. Au bout d'un certains temps, on arrive au terme $a_{100} = \frac{1}{100}$. On va donc prendre $\delta = 100$. Si on choisit un nombre n tel que $n > \delta$, on est sur que :

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Par exemple, si on choisit $n = 200$, on a $a_n = \frac{1}{200}$ et on voit bien que :

$$\left| \frac{1}{200} - 0 \right| < \frac{1}{100}$$

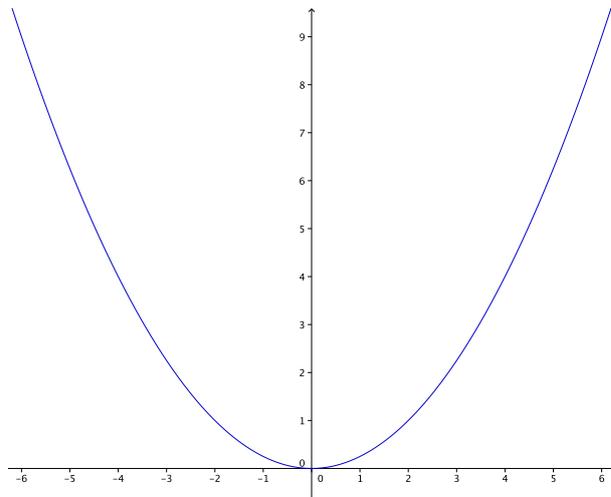
Cette définition veut simplement dire que passé un certain cap (a_δ), tout les termes de la suite sont plus proches de a que d'une certaine valeur fixé au départ (ϵ). Comme ϵ est aussi petit que l'on veut, on fait se rapprocher les termes de a d'aussi près que l'on veut. La suite devient très proche de sa limite, pour de très grandes valeurs de n .

7.5 Fonctions numériques

7.5.1 Introduction

La notion de fonction a déjà été vue de manière assez théorique dans le cours de théorie des ensembles. On avait alors introduit le concept de «graphe» comme un ensemble de couples. Dans la pratique, il est commode de représenter ces couples de manière géométrique.

Prenons un exemple : une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} défini comme suit : $f(x) = \frac{x^2}{4}$. On peut représenter le graphe de la fonction dans un système d'axe :



Chaque point de la courbe a deux coordonnées qui sont les couples du graphe.

Le graphique d'une fonction permet d'observer directement ses propriétés. Nous allons maintenant définir quelques notions supplémentaires par rapport à ces fonctions numériques :

1. Une fonction est croissante sur un intervalle I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. Une fonction est décroissante sur un intervalle (a, b) si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

3. Une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante
4. Les termes strictement (dé)croissante et strictement monotone, s'appliquent lorsque les inégalités sont strictes (comme pour les suites).

7.5.2 Fonctions continues

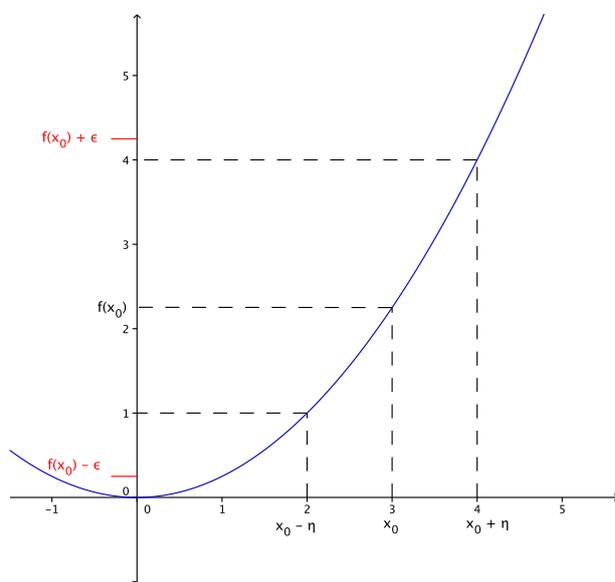
Nous allons commencer par définir de manière formelle une fonction continue. Si vous ne comprenez pas la définition du premier coup il ne faut pas s'inquiéter : elle n'est pas très évidente mais j'expliquerai cette définition juste après.

Définition 43. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si :

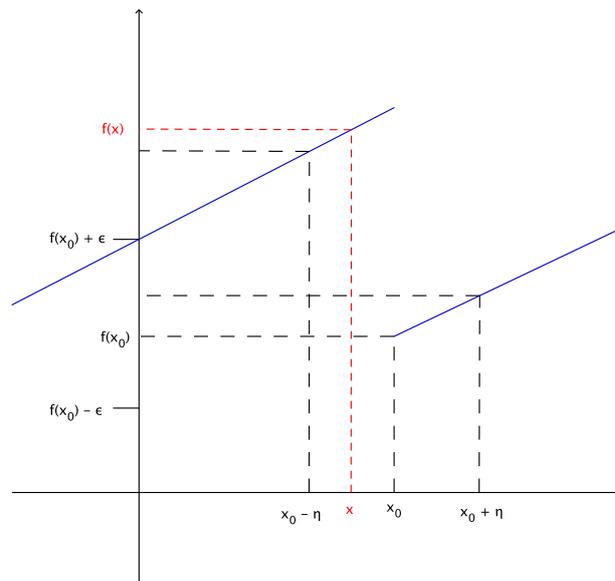
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue à chaque point de cet intervalle.

On commence par dire que l'on peut prendre n'importe quel $\epsilon > 0$ (sous entendu : aussi petit soit-il), et qu'il existe un nombre η (pour cette valeur de ϵ), tel que (x appartenant à I), si la «distance» entre x et x_0 est plus petite que η , alors la «distance» entre $f(x)$ et $f(x_0)$ est plus petite que ϵ :



Pour bien montrer ce que cela veut dire, il suffit de voir une fonction non continue :



La fonction est ici tracée en bleu pour plus de lisibilité.

On voit bien que la fonction n'est pas continue en x_0 : une fois avoir choisi un ϵ positif, quelque soit le nombre η que l'on prend, certaine images se seront pas dans l'intervalle $]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$. Dans le schéma, un tel nombre x est en évidence, ainsi que son image (en rouge). Même si on choisissait un autre η plus petit, on arriverai toujours à avoir des images qui «sortent» de l'intervalle $]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$: la fonction n'est pas continue.

On peut définir très simplement la continuité d'une fonction sur un intervalle : une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue à chaque point de cet intervalle.

Si vous avez bien compris la définition d'une fonction continue, vous pouvez facilement comprendre qu'il est facile de savoir si une fonction est continue ou pas rien qu'en regardant son graphe : une fonction est continue si on peut la tracer sans «lever le crayon».

On peut trouver facilement des exemples de fonctions non continues : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

ou encore $f(x) = \frac{1}{x}$ ne sont pas continues sur \mathbb{R} .

Si f et g sont continues sur I , alors (sur l'intervalle I) :

1. $f + g$ est continue,
2. $f \cdot g$ est continue,
3. $\frac{f}{g}$ est continue (à condition que $\forall x \in I, g(x) \neq 0$).

7.5.3 Limites de fonction

A partir de la définition de la continuité, on peut facilement étendre le concept de limite de suite pour le cas des fonctions. On a la définition suivante :

Définition 44. *Définition : Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a pour limite L au point $x_0 \in I$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

et on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Cela veut dire que si x se rapproche de x_0 (on a en effet $|x - x_0| < \eta$), alors $f(x)$ se rapproche de L ($|f(x) - L| < \epsilon$).

On va prendre un exemple numérique comme nous l'avons fait avec les suites. Prenons par exemple, $f(x) = \frac{x}{2}$ pour faire simple. On choisit un epsilon assez petit, disons $\epsilon = \frac{1}{100}$. Supposons que nous voulions calculer la limite en 2. Il faut choisir un η adéquat pour que :

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

dans notre cas :

$$|x - 2| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{100}$$

et comme $f(x) = \frac{x}{2}$:

$$|x - 2| < \eta \Rightarrow \left| \frac{x}{2} - L \right| < \frac{1}{100}$$

donc :

$$x - \eta < 2 < x + \eta \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{100} < L < \frac{x}{2} + \frac{1}{100}$$

on multiplie par 2 la deuxième inégalité pour pouvoir «comparer» les deux inégalité :

$$x - \eta < 2 < x + \eta \Rightarrow x - \frac{1}{50} < 2 \cdot L < x + \frac{1}{50}$$

on peut donc prendre $\eta = \frac{1}{50}$:

$$x - \frac{1}{50} < 2 < x + \frac{1}{50} \Rightarrow x - \frac{1}{50} < 2 \cdot L < x + \frac{1}{50}$$

et en comparant les deux inégalités, on conclut que $L = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2} = 1$$

Je vous entend déjà dire : mais en fait c'est facile de calculer une limite : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$! Eh bien non ! Ceci n'est valable que si la fonction est continue en a . Mais si la fonction

n'est pas continu en a , il peut quand même y avoir une limite (dans certains cas). Par exemple : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ n'est pas continue en 1 (forcément, il n'y a même pas d'image en 1) et pourtant la limite existe : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$. On a parfaitement le droit de simplifier par $x - 1$ ici car x n'est pas égal à 1 mais on fait *tendre* x vers 1.

Tout comme nous avons défini la notion de limite d'une suite, nous allons maintenant définir la notion de limite d'une fonction en un point. On peut se baser sur la notion de limite d'une suite. En effet, considérons une suite de nombres que l'on va noter x_1, x_2, x_3, \dots , et imaginons que cette suite tende vers un nombre a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$$

L'idée est de se demander si la suite de nombres $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ converge vers une certaine limite. Supposons que cette suite tende vers L , on note alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

et on dit que « $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a ». Notez que c'est juste une nouvelle notation pour écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

On peut assez facilement comprendre (et le montrer mathématiquement) que si la fonction est continue :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On pourrait croire naïvement que cette dernière égalité est toujours vraie. Pour montrer que ce n'est pas le cas, considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Et cherchons sa limite en 1. On sait déjà que cette limite ne peut pas être $f(1)$, puisque $f(1)$ n'est pas défini (division par zéro). Alors cette limite existe-t-elle? Oui, et on peut le voir de la manière suivante. En sachant que $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

Peut-être pensez vous que cela est faux puisque l'on divise par $(x - 1)$ qui vaut zéro si $x = 1$. Mais souvenez vous que par définition :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$. On peut choisir par exemple la suite x_n tel que $x_0 = 0.9, x_1 = 0.99, x_2 = 0.999\dots$. On voit bien que cette suite tend vers 1. En fait lorsque l'on calcule :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

c'est équivalent à calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_n + 1)(x_n - 1)}{x_n - 1}$$

Or, quel que soit le x_n de la suite définie plus haut, $x_n \neq 1$ et donc $x_n - 1 \neq 0$. Il n'y a donc pas de division par zéro.

Nous allons maintenant voir une application pratique de cette notion.

7.6 Fonctions dérivées

7.6.1 Introduction

On va reprendre le paradoxe de la flèche en vol, et montrer que le paradoxe n'est qu'apparent.

On peut faire une première remarque : il faut distinguer ce qu'est un *instant* et ce qu'est une *durée* aussi courte soit-elle. Durant, une durée même extrêmement courte, la flèche se déplace - même si c'est une distance vraiment très petite. Ainsi, lorsque l'on observe la flèche sur une durée de plus en plus petite, on ne constate jamais que le mouvement de la flèche devient nul.

Supposons que la flèche suit une trajectoire parfaitement rectiligne, et que sa vitesse v est constante. Si on l'observe pendant un certain temps t , elle parcourt une distance d tel que $v = \frac{d}{t}$. Lorsque l'on observe la flèche sur un temps de plus en plus court, on la voit parcourir une distance de plus en plus courte, et à chaque fois que l'on calcule le rapport $\frac{d}{t}$ on trouve toujours la même chose : v . On peut donc dire que la vitesse à un moment donné est v , alors que l'on a l'habitude de calculer des vitesses *moyennes* c'est à dire que nous calculons toujours une vitesse sur une certaine durée. Ici on dira que la *vitesse instantanée* de la flèche à un certain moment (par exemple à $t = 2s$) est v .

L'exemple ici est assez simple car la vitesse est constante. Mais on peut avoir des exemples de mouvement où la vitesse change à *chaque instant*. Nous allons voir maintenant comment traiter ce genre de cas.

7.6.2 Le nombre dérivé

Imaginons un corps qui se déplace de manière rectiligne et dont on peut facilement connaître la position en fonction du temps, c'est à dire que nous avons une fonction f tel que :

$$x = f(t)$$

Le mobile est donc à la position x au temps t . Observons la position du mobile après un temps Δt très court pour avoir la meilleure estimation possible de la vitesse instantanée : le mobile sera donc à la position $f(t)$ au temps t et à la position $f(t + \Delta t)$ un court instant plus tard. La vitesse sera donc la distance parcourue $\Delta d = f(t + \Delta t) - f(t)$ divisée par le temps Δt : $v = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Plus Δt sera petit et plus la mesure de la vitesse sera précise. On va donc utiliser une nouvelle fois la notion de limite :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Prenons un exemple : $f(t) = t^2$ et essayons de connaître la vitesse au temps $t = 2s$. On a (petit rappel : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$) :

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta t)^2 - 2^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2^2 + (\Delta t)^2 + 4\Delta t - 2^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta t)^2 + 4\Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t + 4) \\ &= 4m/s \end{aligned}$$

La vitesse du mobile après 2 secondes est donc de 4 mètres par secondes.

On dit dans ce cas que l'on calcule le *nombre dérivé* de la fonction en 2 (ce nombre est 4).

On a donc la définition suivante :

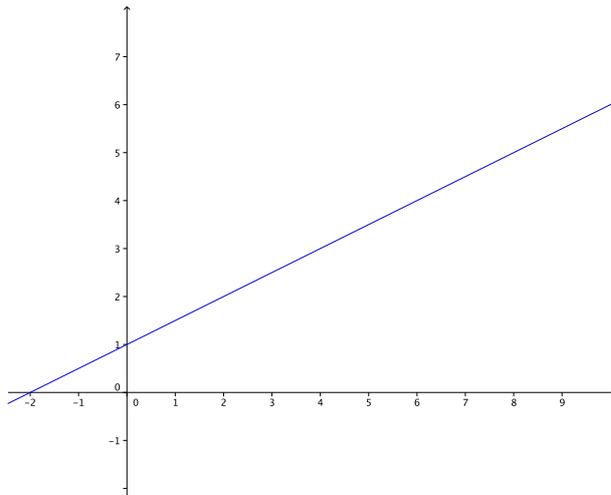
Définition 45. Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, cette fonction est dérivable en $x_0 \in I$ si le nombre α défini par :

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

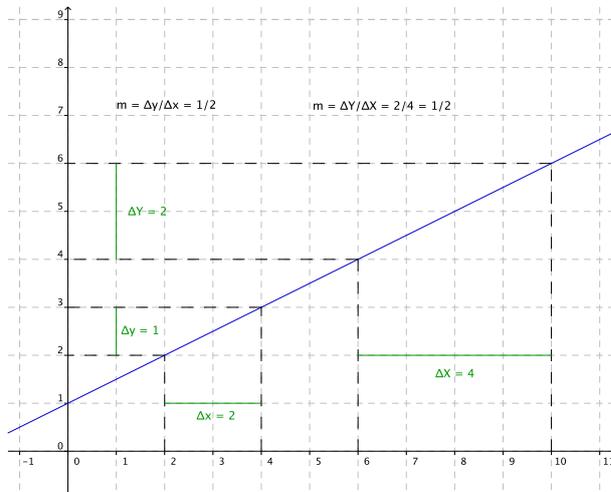
existe et appartient à \mathbb{R} , ce nombre est alors appelé *nombre dérivé* de f en x_0 .

On peut illustrer cela graphiquement. Mais avant d'aller plus loin, il peut être nécessaire de faire un rappel sur la notion de pente d'une droite :

Rappel pour ceux qui ne sont pas familiers avec la notion de pente d'une droite : prenons par exemple, la droite ci dessous :



On voit que cette droite «monte», on dit qu'elle a une certaine «pente». Plus la droite «monte» plus la valeur de la pente est forte. On va maintenant montrer comment on calcule cette pente. Observez le schéma suivant :

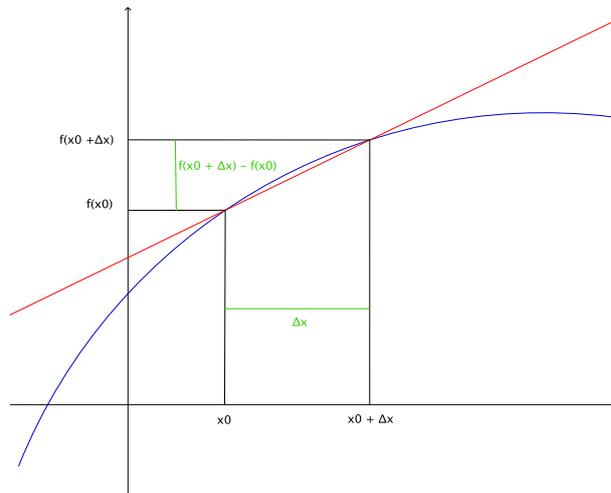


Le dessin est quadrillé pour une meilleur compréhension. Si on part d'un point quelconque du graphique, on voit que si l'on avance de deux cases vers la droite, on doit remonter ensuite d'une case pour retrouver le graphique. On dit donc que la pente de la droite est de un demi.

On montre sur le dessin comment on peut calculer la pente de la droite. On choisit deux points quelconques du graphique et on regarde la différence d'abscisse (que l'on note Δx) et la différence d'ordonnée Δy . On a donc pour calculer la pente m , la formule : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. On voit aussi sur le dessin que le calcul de la pente donne le même résultat quel que soit les deux points choisis.

Revenons sur la notion de nombre dérivé. Prenons une fonction f quelconque.

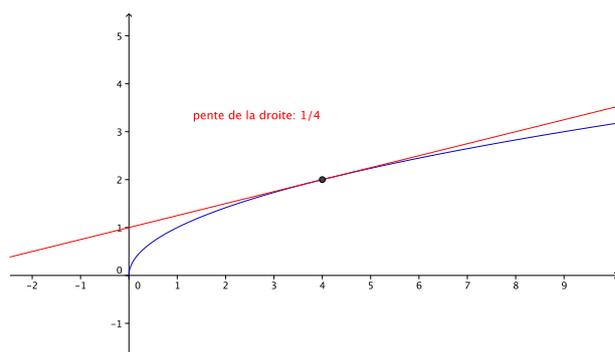
Considérons la droite passant par les points $f(x_0)$ et $f(x_0 + \Delta x)$ (voir schéma ci dessous) :



Une fonction quelconque est tracée en bleu. On prend deux points, x_0 et $x_0 + \Delta x$, et on regarde leurs images.

On peut repérer sur le graphique les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, et tracer la droite passant par ces deux points. On obtient la droite en rouge sur le dessin. On a donc que la pente de la droite est : $m = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

On sait que le nombre dérivé est : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, c'est à dire la pente de la droite lorsque Δx tend vers zéro. C'est à dire, si vous regardez à nouveau le schéma, quand x_0 et $x_0 + \Delta x$ sont infiniment proches et donc que la droite en rouge ne touche plus qu'un seul point du graphique : on peut dire alors que la droite est *tangente* au graphique. Exemple en image :



On a tracé en bleu la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Le nombre dérivé en $x_0 = 4$ est (rappel : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$) :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{(\sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4})(\sqrt{4 + \Delta x} + \sqrt{4})} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + \sqrt{4})}{(4 + \Delta x) - 4} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + \sqrt{4})}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + \sqrt{4})} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x} + \sqrt{4}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Si on trace la tangente en $x = 4$, on a donc que la pente de la droite est $\frac{1}{4}$ (voir schéma).

7.6.3 Fonction dérivée

À partir de la notion de nombre dérivé, on peut définir la *fonction dérivée*. Supposons que nous avons une fonction f , et que nous pouvons calculer le nombre dérivé en chaque point de l'intervalle I . À chaque point x de l'intervalle I , on peut donc associer le nombre dérivé de f en x et on obtient donc la fonction dérivée (notée $f'(x)$ ou encore $\frac{df}{dx}$) défini comme suit :

Définition 46. Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que la fonction est dérivable sur I si $\forall x \in I$ le nombre dérivé de f en x existe, et la fonction dérivée est définie par :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Remarque : on utilise souvent la lettre «h» au lieu de Δx pour alléger l'écriture.

7.7 Formules de dérivation

On a vu la formule : $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ qui permet de calculer la dérivée d'une fonction. En pratique, on ne l'utilise jamais, on utilise des formules que nous allons maintenant établir.

7.7.1 Dérivée d'une somme

Théorème 17. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, alors $f + g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable et :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Démonstration :

Soit donc $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On doit dériver $f + g$, donc :

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

7.7.2 Dérivée d'un produit

Théorème 18. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, alors $fg : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable et :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Démonstration :

Soit donc $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On doit dériver fg , donc :

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x + h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

On rajoute le terme $-f(x)g(x+h)$ pour faire apparaître la dérivée de f :

$$\begin{aligned}
 (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (g(x+h)f'(x) + f(x)g'(x)) \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
 \end{aligned}$$

7.7.3 Dérivée d'un quotient

Théorème 19. *Théorème : soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telle que la fonction g ne s'annule jamais, alors $f/g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable et :*

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Démonstration :

On doit d'abord montrer que $\left(\frac{1}{g} \right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{g} \right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(g(x+h) - g(x))}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-g'(x)}{g(x)g(x+h)} \\
 &= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g} \right)'(x) &= \left(f \frac{1}{g} \right)'(x) \\
 &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \\
 &= \frac{f'(x)g(x)}{g(x)g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
 &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
 \end{aligned}$$

On utilise à la deuxième ligne la formule de la dérivée d'un produit.

7.7.4 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 20. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, alors $g \circ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable et :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)'(x+h) - (g \circ f)'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + f(x+h) - f(x)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} f'(x) \end{aligned}$$

Posons maintenant : $\alpha = f(x+h) - f(x)$, on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + \alpha) - g(f(x))}{\alpha} f'(x) \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

7.8 Dérivées usuelles

Pour pouvoir calculer une dérivée, on utilise en pratique les formules que nous venons de voir, plus une série de dérivées «connues» à retenir par cœur.

La fonction constante : $f(x) = k$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

La fonction identité : $f(x) = x$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

La fonction $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Remarquez qu'on a utilisé $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

La fonction $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
 &= \frac{-1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Les fonctions du type $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$:

On va montrer que $f'(x) = nx^{n-1}$. On sait déjà que c'est vrai pour $n = 0$: $(x^0)' = k' = 0$, pour $n = 1$: $(x^1)' = x' = 1 \cdot x^0 = x$ et pour $n = 2$: $(x^2)' = 2x^1 = 2x$. Pour $x = 3$ et $x = 4$:

$$\begin{aligned}
 (x^3)' &= (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 = 3x^2 \\
 (x^4)' &= (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 = 4x^3
 \end{aligned}$$

On peut continuer ainsi encore très longtemps, mais on peut remarquer que si on sait que $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour un certains n , alors on peut prouver la même formule pour $n+1$ c'est à dire $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. En effet :

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1}x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

Et on prouve ainsi implicitement la formule pour tout n , car on sait que c'est vrai pour $n = 4$ donc c'est vrai pour $n = 5$, et donc pour $n = 6$, ... C'est un *raisonnement par récurrence*.

La fonction $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos x \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

On utilise la formule $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$ pour passer de la deuxième à la troisième ligne, et la formule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ à la fin.

La fonction $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]' \\
 &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' \\
 &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) \\
 &= -\sin(x)
 \end{aligned}$$

On utilise $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ et $\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$.

La fonction $f(x) = \tan(x)$:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

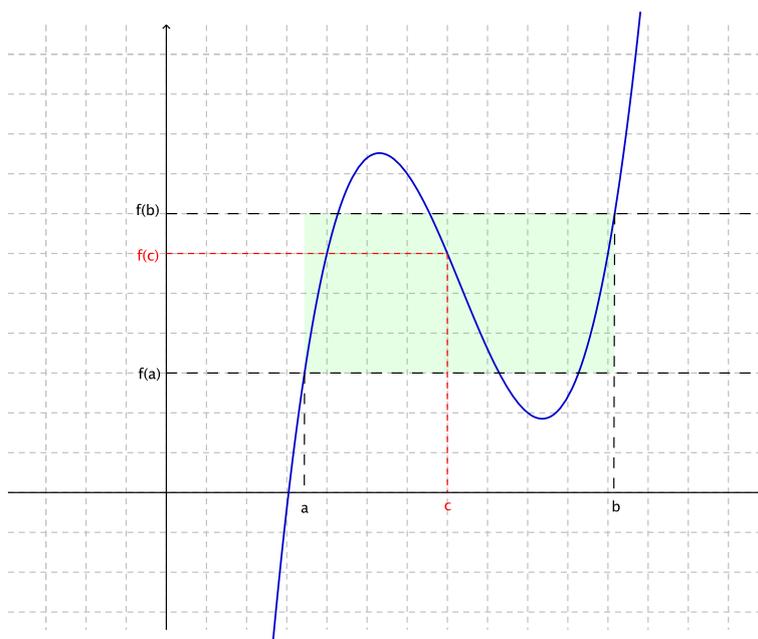
En résumé :

$$\left| \begin{array}{l} k' = 0 \\ x' = 1 \\ (x^2)' = 2x \\ \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \left(\frac{1}{x} \right)' = \frac{-1}{x^2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} (x^n)' = nx^{n-1} \\ (\sin x)' = \cos x \\ (\cos x)' = -\sin x \\ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right|$$

7.9 Théorème des valeurs intermédiaires

7.9.1 Introduction

Nous allons maintenant énoncer une série de théorèmes important en analyse. Le premier de ces théorèmes est vraiment très simple à énoncer. On considère une fonction continue quelconque, sur un intervalle $[a, b]$:



On regarde les points images $f(a)$ et $f(b)$ sur l'axe y . Entre ces deux points, on en choisit un, n'importe lequel, appelons-le x . Alors, le théorème dit qu'il est possible de trouver un point c entre a et b , tel que $x = f(c)$.

On peut en donner une illustration simple. Supposons que nous nous tenions au pied d'une montagne, à une altitude de cent mètres au dessus du niveau de la mer. Le sommet de la montagne se trouve lui à mille mètres au dessus du niveau de la mer. On emprunte un chemin qui nous emmène au sommet, et disons qu'il faille douze kilomètres pour y arriver. On peut définir la fonction «altitude» (qu'on va noter simplement f) qui donne l'altitude en fonction de la distance parcourue. En prenant la convention d'être à zéro au pied de la montagne :

$$f(0) = 0.1$$

et :

$$f(12) = 1$$

en exprimant tout en kilomètres. Le théorème nous dit donc, que pour n'importe quel altitude z comprise entre 0.1 et 1 km au dessus du niveau de la mer, correspond au moins un point sur le chemin situé à cette altitude. C'est tout à fait logique : on passe par toutes les altitudes intermédiaires (d'où le nom du théorème).

7.9.2 Énoncé

Théorème 21. Soit une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors :

$$\forall u \in \mathbb{R}, (u \in [f(a), f(b)] \vee u \in [f(b), f(a)]) \Rightarrow (\exists c \in [a, b], f(c) = u)$$

Notez que l'on s'assure que de traiter les cas $f(a) \leq f(b)$ et $f(a) \geq f(b)$ grâce à l'utilisation du «ou» logique (symbole « \vee »).

7.9.3 Démonstration

Nous allons tout d'abord poser que $f(a) \leq f(b)$, le cas contraire se démontrant de manière similaire. On considère le sous-ensemble E de $[a, b]$, des éléments x tel que $f(x) \leq u$ (u étant compris entre $f(a)$ et $f(b)$). On pose encore $c = \sup E$. On peut montrer qu'il est possible de trouver une suite d'éléments de E tendant vers c (cette démonstration n'est pas encore sur Freesciences). Pour chaque élément x_i de cette suite, on a $f(x_i) \leq u$ (par définition de E); en passant à la limite, on a donc $f(c) \leq u$.

On peut maintenant prouver $f(c) \geq u$, on aura donc $f(c) = u$ et le théorème sera démontré. Si $c = b$, c'est vrai car u a été choisi tel $f(b) \geq u$. Si $c \neq b$, on considère l'intervalle semi-ouvert $]c, b]$. Ses éléments vérifient $f(x) > u$, puisqu'ils n'appartiennent pas à E , étant strictement supérieurs à sa borne supérieure. Comme précédemment, c étant l'infimum de l'intervalle, il est limite d'une suite d'éléments de cet intervalle, par passage à la limite, on a $f(c) \geq u$.

7.9.4 Analyse et conséquences

Un cas particuliers de ce théorème est fort utile en analyse. Il suffit de considérer le cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou le cas contraire, l'important est le changement de signe). Dans ce cas, zéro est entre les images de a et de b , et le théorème nous dit qu'il existe un certain x entre a et b tel que $f(x) = 0$. Ceci est donc utile lorsque l'on veut prouver qu'il existe une racine dans un certain intervalle.

Arrêtons nous un instant sur ce point. Tout ce que nous avons dit c'est «une fonction continue qui change de signe sur un certain intervalle, s'annule au moins une fois quelque part sur cette intervalle». Avec un simple dessin et quelques explications, il est sans doute possible de faire comprendre cela à un enfant de dix ans. Ce qu'il ne comprendra sans doute pas, c'est plutôt : pour pourquoi vouloir prouver une chose pareille ?

Les mathématiques sont remplies de démonstrations «inutiles». Si vous avez lu le chapitre sur les nombres, vous avez pu très bien vous en rendre compte. Mais encore une fois, prouvez ce qui est «évident» est une *nécessité*. C'est la seule manière de s'assurer une rigueur absolue.

7.10 Théorème de Rolle

7.10.1 Introduction

Le théorème de Rolle est tout aussi facile à comprendre que le précédent. Sa facilité ne doit pas faire oublier son importance dans l'élaboration rigoureuse de l'analyse ; il est effet nécessaire en mathématique de démontrer toute assertion, aussi évident soit-elle intuitivement.

Nous allons ici donner l'intuition sous-jacente à ce théorème, sans aller dans les détails mathématiques. Considérons une fonction sur un certain intervalle $[a, b]$, cette fonction étant telle que :

$$f(a) = f(b)$$

Le théorème de Rolle nous dit alors que si la fonction est dérivable, il existe un certain point c entre a et b tel que :

$$f'(c) = 0$$

Une première manière de comprendre ce résultat est de visualiser un dessin et de voir que la «pente instantanée» de la fonction s'annule en un point. Je vous propose ici une méthode plus «cinématique».

Nous avons vu que la vitesse en fonction du temps est la dérivée (par rapport au temps) de la fonction de la position en fonction du temps. Imaginons une fourmi se déplaçant sur un axe gradué, et un expérimentateur mesure sa position sur l'axe en fonction du temps. Son mouvement se fait sur une dimension, mais peut-être assez compliqué : elle change de vitesse, peut faire des demi-tours,... Il est possible à partir des mesures de construire une fonction $x(t)$ de la position en fonction du temps. Imaginons qu'elle repasse deux fois au même endroit, par exemple au temps $t = 10s$ et $t = 20s$, c'est à dire mathématiquement :

$$x(10) = x(20)$$

Le théorème dit alors, qu'à un certain temps t^* , entre dix et vingt secondes :

$$x'(t^*) = 0$$

Mais la dérivée de $x(t)$ donnant la vitesse, on sait donc qu'au temps t^* , la vitesse de la fourmi est nulle. Cela est tout à fait normal : étant repassée deux fois au même endroit, elle a dû au moins une fois faire demi-tour, à l'instant précis où elle fait demi-tour, sa vitesse est nulle.

7.10.2 Énoncé

Théorème 22. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

7.10.3 Démonstration

Si la fonction est constante sur $[a, b]$, le théorème est bien évidemment vrai. Dans le cas contraire, la fonction passe par un certain maximum global que l'on note $f(c)$. Le maximum étant atteint au point c on a, quel que soit $h > 0$ et tel que $c + h \in [a, b]$:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Si fait tendre h vers zéro par valeurs positives, on peut en déduire que $f'(c) \leq 0$.

Toutefois, on peut très bien refaire le même raisonnement avec des valeurs négative de h , cette fois, on aurait :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Et donc cette fois, $f'(c) \geq 0$. On en conclut donc que $f'(c) = 0$.

7.11 Théorème des accroissements finis

7.11.1 Introduction

Ce théorème ressemble un peu au précédent. On considère une fonction sur un certain intervalle $[a, b]$ (dérivable et continue). Ce théorème dit qu'il existe un certain point c entre a et b tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le théorème précédent est un cas particuliers de celui-ci : si $f(b) = f(a)$, alors $f'(c) = 0$. Pour comprendre ce qui se passe, il faut noter que la quantité :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente la «pente moyenne» de la fonction entre a et b . Reprenons un exemple cinématique. On part en voiture d'un point a pour arriver au point b , la vitesse de la voiture est susceptible de changer régulièrement pendant le voyage. En supposant que la voiture aille en ligne droite, la distance entre les points a et b est $x(t_b) - x(t_a)$; t_b et t_a étant les temps de passages au points a et b respectivement. Pour calculer la vitesse moyenne, on divise la distance parcourue par le temps $t_b - t_a$:

$$v_m = \frac{x(t_b) - x(t_a)}{t_b - t_a}$$

En appliquant le théorème, on sait qu'il existe un certain temps t^* ou la vitesse instantanée de la voiture sera égale à sa vitesse moyenne. C'est logique : si on fait un parcours à 60 kilomètres par heure de moyenne, à un instant donné au moins on aura été à cette vitesse.

7.11.2 Énoncé

Théorème 23. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.11.3 Démonstration

On pose $g(x) = f(x) - \alpha x$, α étant une certaine constante réelle. On fixe cette constante en imposant que $g(a) = g(b)$, c'est à dire qu'on doit avoir :

$$f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b$$

Il ensuite facile d'isoler r , on obtient :

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme g est par construction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et que de plus $g(a) = g(b)$, il satisfait aux conditions du théorème de Rolle. Il existe donc un certain $c \in [a, b]$ tel que $g'(c) = 0$. Partant de la définition de g et en dérivant, $f'(c)$ s'écrit :

$$f'(c) = g'(c) + \alpha = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.12 Théorème du sandwich

7.12.1 Énoncé

Le théorème du sandwich s'énonce de la manière suivante. Supposons que sur un certain intervalle, on ait trois fonctions f , g et h , tels que pour tout point x appartenant à cet intervalle, on ait :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et que l'on ait pour un certain point a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

alors le théorème nous dit que :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Cela peut se comprendre de la manière suivante. La fonction $g(x)$ est prise «en sandwich» entre f et h , si ces fonctions tendent vers une certaine limite en un point, elle se rejoignent et $g(x)$ «prise en étau» atteint la même limite.

7.12.2 Introduction

Théorème 24. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et $a \in I$ un nombre réel. Soient encore trois fonctions f , g et h définies sur I , sauf éventuellement en a . Si :

- $\forall x \in I \wedge x \neq a, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

7.12.3 Démonstration

On commence par prouver un cas particuliers du théorème. On choisit $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et $L = 0$. La deuxième hypothèse nous dit que :

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$$

Ce qui peut s'écrire encore, par définition de la limite de fonction :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |h(x)| < \epsilon$$

En prenant $f(x) = 0$ dans la première hypothèse :

$$\forall x \in I \wedge x \neq a, 0 \leq g(x) \leq h(x)$$

Donc, puisque tout est positif :

$$|g(x)| \leq |h(x)|$$

ce qui nous permet d'écrire l'expression de la limite :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x)| \leq |h(x)| < \epsilon$$

En conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = L$$

Ce qui prouve donc le cas particuliers. Pour prouver le cas général, partons de :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

On soustrait $f(x)$:

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$$

Si on fait tendre x vers a , $f(x)$ et $h(x)$ tendent vers L et $h(x) - f(x)$ tend vers 0. On se retrouve dans le cas particuliers déjà prouvé, qui nous dit que $g(x) - f(x) \rightarrow 0$. On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x) = 0 + L = L$$

7.13 Calcul intégral

7.13.1 Comment calculer la surface d'un disque ?

La question semble innocente. Simple. La plupart d'entre vous ont sans doute en lisant le titre, repensé à la fameuse formule connue depuis longtemps : $S = \pi r^2$. Une formule toute simple. Se pose juste une question un peu délicate : cette formule, d'où vient-elle ?

On peut par un découpage approprié de la sphère (on la découpe comme une tarte) donner peut être pas une démonstration rigoureuse mais au moins une intuition pour la justifier. Nous allons utiliser une autre technique, plus formelle, qui aura l'avantage de fonctionner pour calculer la surface de beaucoup d'autres formes géométriques.

Inspirons nous des techniques habituelles de la géométrie. Très souvent lorsque l'on est confronté à un polygone un peu «spécial», on a le réflexe de le découper en triangles. L'idée est donc le décomposer une forme compliquée en plusieurs formes simples dont la surface est facile à calculer. Dans le cas d'un disque cependant, il est impossible de faire un découpage exact en polygones. Mais c'est pas très grave.

En effet, nous allons utiliser une forme très simple : le rectangle. On peut se rendre facilement compte qu'une tel découpage ne sera qu'une approximation, du moins dans un premier temps. Pour faire ce découpage, nous allons nous mettre dans un système d'axe et nous allons de plus utiliser la notion de fonction. En effet, c'est bien beau de dire : «on va découper en rectangle» mais après qu'est ce qu'on fait comme calcul ? Il faut connaître la largeur et la longueur de chaque rectangle.

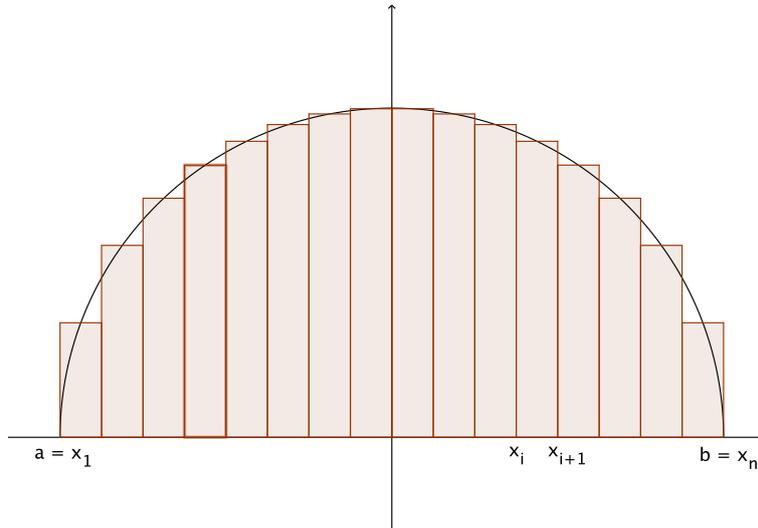
Considérons un disque de rayon r centré à l'origine. L'ensemble des points du bord du disque est l'ensemble des points qui sont à une distance r de l'origine, c'est à dire l'ensemble des points (x, y) tels que :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Cependant, pour utiliser la notion de fonction, il faut qu'à chaque abscisse x corresponde au plus un point sur le disque. On va donc se restreindre à un demi disque, d'équation :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Et on découpe comme ceci :



Notons $a = -r$ et $b = r$. On découpe donc l'intervalle $[a, b]$ pour construire la base des rectangles. On a donc des nombres $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ qui forment ce découpage avec $a = x_1$ et $b = x_n$.

À chaque rectangle correspond deux nombres, x_i et x_{i+1} , tel que le segment qui joint ces points sur l'axe x soit la base du rectangle. Les rectangles sont construits de manière à ce que leur hauteur soit l'image du nombre situé entre x_i et x_{i+1} , soit :

$$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

La surface de chaque rectangle est sa base multiplié par sa hauteur :

$$S_i = (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Comme on fait un découpage régulier, les bases de tout les rectangles sont égales, et on va noter $h = (x_{i+1} - x_i)$. De même, on sait que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, donc :

$$S_i = h \sqrt{r^2 - \frac{(x_i + x_{i+1})^2}{4}}$$

mais on sait que $x_{i+1} = x_i + h$, donc :

$$S_i = h \sqrt{r^2 - \frac{(2x_i + h)^2}{4}}$$

Et la surface totale est donc la somme de tout les S_i multipliée par 2 car on n'a pour l'instant qu'un demi-disque :

$$S_{tot} = 2 \sum_{i=1}^n h \sqrt{r^2 - \frac{(2x_i + h)^2}{4}}$$

Plus les rectangles sont fins et nombreux, plus le calcul de la surface est précis, à la limite donc, pour des rectangles infiniment fins, on a la somme exacte :

$$S_{tot} = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n h \sqrt{r^2 - \frac{(2x_i + h)^2}{4}} \right]$$

Il reste à prouver que :

$$S_{tot} = \pi r^2$$

Ce qui semble loin d'être simple... on n'a pas encore calculé la limite d'une expression aussi compliquée!! C'est pourtant possible et nous allons voir comment.

7.13.2 Somme de Riemann

Introduction

On va faire le même raisonnement que précédemment, mais de manière plus générale : on s'intéresse à la surface en dessous d'une courbe quelconque.

Considérons une fonction quelconque $f(x)$ positive sur l'intervalle $[a, b]$. On découpe la surface en dessous de la courbe en un grand nombre de petits rectangles de hauteur $f(y_i)$ et ayant une base $x_{i+1} - x_i$ tel que $x_i \leq y_i \leq x_{i+1}$. Si on note $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, la surface est donc (en approximation) :

$$S = \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta x_i$$

Il s'agit d'une *somme de Riemann*. On fait maintenant tendre le nombre de rectangle vers l'infini, et on note la somme comme ceci :

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

C'est une *intégrale de Riemann*. Notre but principal va être, et pour longtemps, de savoir comment calculer cette expression! remarquez que le symbole « \int » est une sorte de S allongé qui rappelle que l'on calcule bien une somme.

On peut déjà énoncer une propriété : l'additivité de l'intégrale, on a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Ainsi que la linéarité de l'intégrale :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lambda f(x) dx$$

Tout simplement parce que les surfaces s'additionnent. De plus on pose que :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Enfin, une dernière propriété assez évidente est la monotonie de l'intégrale :

$$(\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Exemple de calcul d'une intégrale

Ce que nous savons maintenant n'est pas suffisant pour calculer la surface d'un disque. Mais on peut trouver un cas plus simple. Laissons de côté le cas où la fonction est une droite : le calcul est simple, mais tellement simple que le recours au calcul de l'intégrale de Riemann ne se justifie pas. Nous allons plutôt calculer la surface en dessous de la courbe $y = x^2$ entre 0 et 1.

On découpe donc l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même longueur (la longueur sera donc $\frac{1}{n}$). On peut choisir les x_i tels que $x_i = \frac{i}{n}$, avec i variant de 1 à n (et $x_n = 1$). La surface de chaque rectangle sera donc $\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$:

$$S = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

en mettant $\frac{1}{n^3}$ en évidence :

$$S = \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2)$$

Or on peut prouver que :

$$1 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc :

$$S = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}$$

n

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

Malheureusement, ce calcul est souvent très compliqué. Mais rendez vous compte déjà du résultat : la surface que nous avons calculé n'est pas une surface simple, la somme de Riemann montre déjà son intérêt.

7.14 Théorème des accroissements finis (forme intégrale)

7.14.1 Introduction

Le théorème qui nous intéresse ici est un peu complexe à énoncer de manière intuitive. C'est pour cela que nous allons juste en donner un cas particuliers, et expliquer son intérêt.

Il s'énonce de la manière suivante : si on considère une fonction sur un certain intervalle $[a, b]$, alors l'aire sous la courbe de cette fonction (que l'on peut calculer par une intégrale) est égale à l'aire d'un rectangle dont la base est l'intervalle $[a, b]$ et la hauteur une certaine «hauteur moyenne» de la courbe.

Ce théorème (pas le cas particuliers) est utile pour définir le centre de masse de la surface sous la courbe.

7.14.2 Énoncé

Théorème 25. Soit deux fonctions f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b], g(x) \leq 0$. Il existe alors un nombre $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

7.14.3 Démonstration

Tout d'abord, il faut noter que nous allons utiliser le théorème des bornes, qui dit qu'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, possède un minimum et un maximum. Aussi simple et logique soit cette énoncé, sa démonstration l'est moins, et ne figure pas encore sur Freesciences.

Notons donc, m et M le minimum et maximum de f . On a donc, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, et puisque, $g(x) \leq 0$:

$$\forall x \in [a, b], m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$$

Par monotonie et linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in [a, b], m \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Il existe donc un nombre $d \in [a, b]$ tel que :

$$d \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

On applique donc le théorème des valeurs intermédiaires, pour trouver $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$:

$$f(c) \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ce qui achève la démonstration.

7.14.4 Cas particuliers

En prenant $g(x) = 1$, $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$, par simple application de la formule de l'aire d'un rectangle. On a donc :

Théorème 26. Soit une fonction f une fonction continue définie sur $[a, b]$. Il existe alors un nombre $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

7.15 Théorèmes fondamentaux de l'analyse

7.15.1 Introduction

Nous voici arrivés aux deux théorèmes fondamentaux de l'analyse, qui vont enfin nous permettre de répondre à l'une des motivations de départ, à savoir comment calculer une surface compliquée.

Ces théorèmes font le lien entre primitive et intégrale. Nous avons vu ce qu'est une intégrale mais qu'est ce qu'une primitive? C'est simple. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f si la dérivée de F est f . Le calcul intégrale se réduit donc à un calcul de primitive, en effet, le deuxième théorème fondamental de l'analyse nous dit que :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

On voit que si l'on connaît F le calcul est incroyablement simple!

Essayons d'en avoir une intuition «physique». Supposons un point se déplaçant sur une ligne droite, sa vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps :

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

Les notations $x'(t)$ et $\frac{dx}{dt}$ sont équivalentes. La deuxième, dite notation de Leibniz, peut se comprendre de manière intuitive. En effet, à partir de la vitesse moyenne :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

on obtient la vitesse instantané en passant à la limite (on obtient donc la dérivée de $x(t)$), pour montrer cela on remplace Δ par d :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Et mathématiquement, on a tout à fait le droit de réécrire notre équation comme ceci :

$$v(t) \cdot dt = dx$$

N'oublions pas que dx n'est rien d'autre que Δx lorsque l'on prend la limite. dx est donc une «distance infinitésimale». Pour connaître la distance totale parcourue par le mobile, on additionne donc une infinité de «distance infinitésimale». C'est à dire, par l'équation précédente, sommer des termes infinitésimaux comme $v(t) \cdot dt$. Pour le noter, on reprend le concept de limite :

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(t) \Delta t_i$$

On retombe sur la définition de l'intégrale de Riemann! On note alors :

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

On voit sur cette dernière équation qu'intégrer revient à «retomber» sur une primitive. On va maintenant énoncer cela de façon rigoureuse.

7.15.2 Premier théorème fondamental de l'analyse

Énoncé

Théorème 27. *Considérons une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $]a, b[$ et est telle que :*

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout x appartenant à $]a, b[$.

Démonstration

Prenons deux points dans $[a, b]$, x et $x + \Delta x$. On peut écrire :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

On a vu l'additivité de l'intégrale, que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

On peut donc écrire :

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

L'équation de départ peut donc se réécrire :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

On utilise maintenant la forme intégrale du théorème des accroissements finis, dans le cas particuliers vu précédemment :

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$$

donc :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(c)\Delta x$$

ou encore :

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

En prenant la limite quand Δx tend vers zéro, le membre de droite devient la dérivée de $F(x)$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c)$$

Pour calculer cette limite, on utilise le théorème du sandwich. On sait que $x \leq c \leq x + \Delta x$ et que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x = x$ et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \Delta x = x$, le théorème nous dit donc que :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c(x) = x$$

Où $c(x)$ est une fonction qui donne une valeur possible de c en fonction de x . Faire tendre Δx vers zéro revient donc à faire tendre c vers x , c'est à dire :

$$F'(x) = \lim_{c \rightarrow x} f(c)$$

f étant continue en c , on peut conclure :

$$F'(x) = f(x)$$

7.15.3 Deuxième théorème fondamental de l'analyse

Énoncé

Théorème 28. Soit une fonction f définie sur $[a, b]$ ayant une primitive F sur $[a, b]$, c'est à dire que pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) = F'(x)$$

Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration

Rappelons tout d'abord la définition de l'intégrale de Riemann :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(y_i)\Delta x_i$$

Où on définit Δx comme la largeur du plus grand rectangle :

$$\Delta x = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (\Delta x_i) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_{i+1} - x_i)$$

Rappelons encore que l'on découpe l'intervalle $[a, b]$ de telle sorte que :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$$

donc :

$$F(b) - F(a) = F(x_{n+1}) - F(x_1)$$

Rajoutant des termes s'annulant deux à deux (des termes comme $(-F(x_i) + F(x_i))$) :

$$F(b) - F(a) = F(x_{n+1}) + (-F(x_n) + F(x_n)) + \dots + (-F(x_i) + F(x_i)) + \dots + (-F(x_2) + F(x_2)) - F(x_1)$$

On peut alors regrouper différemment les termes :

$$F(b) - F(a) = (F(x_{n+1}) - F(x_n)) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) + \dots + (F(x_{i+1}) - F(x_i)) + \dots + (F(x_2) - F(x_1))$$

C'est à dire :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe un certain $c \in [a, b]$ tel que $F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, c'est à dire que :

$$F'(c)(b - a) = F(b) - F(a)$$

On peut aussi l'appliquer sur chaque intervalle $[x_{i+1}, x_i]$:

$$F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

L'équation vue un peu plus haut devient en remplaçant :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Mais par hypothèse, $F'(c_i) = f(c_i)$, et utilisant la définition de Δx_i :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

On reconnaît bien là une somme de Riemann, il suffit donc de prendre la limite pour conclure la démonstration :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Chapitre 8

Mécanique newtonienne

8.1 Qu'est ce que la mécanique newtonienne ??

8.1.1 Définition

La mécanique newtonienne (aussi appelée «mécanique classique») est, comme son nom l'indique bien, basée principalement sur les travaux de Newton. En particulier, le livre *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* écrit par Newton jette les bases de cette discipline. On peut diviser la mécanique newtonienne en plusieurs parties distinctes.

On peut faire le découpage suivant :

1. La *cinématique* étudie les mouvements sans s'occuper de leurs causes. On tentera donc de trouver les équations qui peuvent décrire l'évolution d'un mobile en fonction du temps, c'est à dire d'étudier précisément la notion de trajectoire ;
2. la *statique* étudie les systèmes mécaniques dans lequel les corps de ces systèmes sont au repos (leur vitesse est nulle) ;
3. la *dynamique* étudie les mouvements des corps en tenant compte cette fois des causes de ces mouvements, on tentera d'établir les équations des trajectoires en fonction des forces qui s'exercent sur ces corps.

8.2 Cinématique

8.2.1 Notion de référentiel

Il est évident que la notion d'*observateur* est très importante en physique. Pour faire de la physique, il faut évidemment faire des mesures, et pour qu'une mesure ait un sens, il faut soit que tout les observateurs s'accordent sur cette mesure (ou au moins une classe particulière d'observateurs «privilegiés»), ou du moins que l'on puisse toujours contextualiser la mesure.

Précisons cette idée. Deux personnes différentes observant un même phénomène naturel peuvent avoir des visions tout à fait différentes. Un exemple simple : on sait tous (ou presque) que la terre tourne autour du soleil. Mais si ceci est vrai en particuliers pour

un observateur immobile par rapport au soleil, pour un observateur terrestre, le soleil tourne autour de la terre. Il faut donc préciser ce que cela veut dire : «la terre tourne autour du soleil», est-ce une simple question de perspective ou y a-t-il quelque de plus profond derrière ? On reviendra sur ce genre de questionnement en abordant la relativité de Galilée.

Il existe une notion plus précise et plus commode que la notion un peu vague d'«observateur» : c'est la notion de *référentiel*. On peut définir un référentiel en faisant appel explicitement à un système de coordonnées précis, mais ce n'est pas obligatoire. Ici, on va faire une distinction : ainsi on va dire par exemple que deux observateurs immobiles l'un par rapport à l'autre sont dans le même référentiel, mais bien sûr ils sont libre d'utiliser chacun le système de coordonnées de leur choix.

Un référentiel est donc un cadre particuliers dans lequel on va faire des mesures. Pour cela, on va attacher au référentiel un ou plusieurs systèmes de coordonnées dans le but de mesurer les positions, vitesses, ... des différents mobiles étudiés. On peut utiliser le type de système de coordonnées que l'on souhaite : cartésiens, sphériques, cylindrique, ... Un système de coordonnées spatiales n'est pas suffisant : il faut de plus pouvoir mesurer le temps, intuitivement on pourrait dire que l'on attache au référentiel une *horloge*. En mécanique newtonienne, toutes les horloges (supposées infiniment précises !) de tout les référentiels sont parfaitement synchronisées. Une conséquence particulière est que la simultanéité est absolu : deux événements simultanés dans un référentiel le sont dans tout les autres référentiels.

Cette façon de présenter les choses n'est cependant pas satisfaisante. En fait, si l'on veut être précis et pouvoir garder la même définition dans le cadre de la relativité restreinte, il nous faut une infinité d'horloge, une en chaque point de l'espace. Elles sont toutes immobiles et synchronisées les unes par rapport aux autres. Si donc un événement survient en un certain point de l'espace, on note le temps correspondant en regardant le temps indiqué par l'horloge en ce point. Bien sûr c'est une vue de l'esprit, on ne pas réellement couvrir tout l'espace d'horloges.

On peut prendre les mêmes précautions pour les mesures spatiales. On va imaginer que l'on peut repérer les positions des horloges par des règles (et éventuellement pouvoir aussi mesurer des angles) de manière à étiqueter chaque horloges par ses coordonnées. Ce qui permet, pour n'importe quel évènement, de simplement lire sa position dans l'espace, en regardant l'étiquetage de l'horloge en ce point.

Pour connaître la trajectoire d'un corps, il faut déterminer quel est sa position au cours du temps. Pour repérer la position d'un point, il suffit de donner ses coordonnées par rapport au système de coordonnées du référentiel. Pour un objet étendu c'est plus compliqué : il est constitué de plusieurs points et il peut tourner sur lui-même pendant son déplacement ! Voilà pourquoi on va commencer par étudier des objets (imaginaires) qui sont de simple points, c'est à dire des *objet ponctuel*.

8.2.2 Notion de trajectoire

Considérons un mobile en mouvement pendant un certain intervalle de temps (qui peut être infini). L'ensemble des positions successives du mobile est appelé le *support de*

la *trajectoire*. Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de trajectoire : la donnée du support de la trajectoire ne dit pas où se trouve le mobile à un certain temps donné contrairement la trajectoire.

Supposons que l'on ait un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On repère la position d'un point P :

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x, y, z sont les coordonnées du point P . Si ces coordonnées évoluent au cours du temps et que $X(t), Y(t), Z(t)$ sont les coordonnées du point en fonction du temps on peut écrire :

$$\vec{OP}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$$

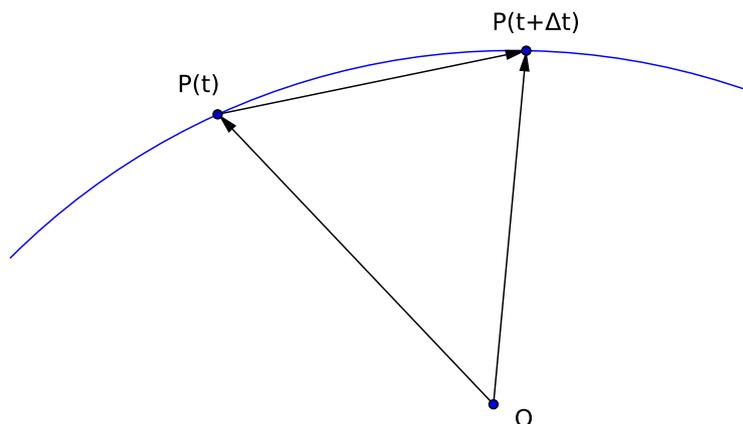
Ce qui définit une fonction \vec{f} tel que $\vec{OP}(t) = \vec{f}(t)$ donc la position du mobile en fonction du temps : c'est la *trajectoire du mobile*.

8.2.3 Vitesse

Nous allons maintenant définir la vitesse d'un mobile : c'est tout simplement la distance parcourue par unité de temps donc $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ où Δs représente la distance parcourue par le mobile sur le support de la trajectoire pendant le temps Δt . Il s'agit évidemment là de la vitesse *moyenne* calculé sur le temps Δt . Cependant, dans le cas de mobile ayant une vitesse variant à chaque instant, la notion de *vitesse instantanée* est très utile, pour définir la vitesse instantanée, on passe à la limite de Δt tendant vers zéro (on définit la fonction S comme donnant la position sur la courbe en fonction du temps : $s = S(t)$) :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS(t)}{dt}$$

On peut de plus définir le *vecteur vitesse* du mobile. En un point du support de la trajectoire, le vecteur vitesse a pour norme la vitesse (comme définit ci dessus) et est tangent au support. De plus, le sens du vecteur est le sens de déplacement du mobile. Considérons le vecteur position \vec{OP} du mobile, à l'instant t et $t + \Delta t$ (c'est à dire les vecteurs $\vec{OP}(t)$ et $\vec{OP}(t + \Delta t)$) :



Le point $P(t)$ est à la position $S(t)$ sur la courbe et le point $P(t + \Delta t)$ est à la position $S(t + \Delta t)$. Si on fait tendre Δt vers zéro, le vecteur $\vec{P(t)P(t + \Delta t)}$ devient tangent à la courbe et sa norme tend à être égale à $S(t + \Delta t) - S(t) = dS(t)$. Si on divise ce vecteur par Δt , sa norme lorsque Δt tend vers zéro devient donc $\frac{dS(t)}{dt}$ c'est à dire la vitesse.

On a donc que le vecteur vitesse est :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OP}(t + \Delta t) - \vec{OP}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{OP}(t)}{dt}$$

8.2.4 Accélération

L'accélération est simplement l'accroissement de la vitesse par unité de temps : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Comme pour la vitesse on définit l'accélération instantanée :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\frac{dS(t)}{dt})}{dt} = \frac{d^2 S(t)}{dt^2}$$

On définit de même le vecteur accélération, et on dérive simplement le vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(\frac{d\vec{OP}(t)}{dt})}{dt} = \frac{d^2 \vec{OP}(t)}{dt^2}$$

8.2.5 Mouvements simples

Mouvements rectilignes uniformes

Un mouvement rectiligne uniforme est un mouvement dans lequel la vitesse est constante, le mobile se dirigeant en ligne droite. On peut choisir un repère cartésien dans lequel le mouvement du mobile se fait le long de l'axe x par exemple : ainsi on ne se préoccupe que d'une seule coordonnée spatiale. Nous allons établir la trajectoire du mobile, c'est à dire connaître la fonction X tel que $x = X(t)$.

On connaît la fonction V donnant la vitesse en fonction du temps : $V(t) = v$ tout simplement (vitesse constante). On sait que $V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$ donc que $v = \frac{dx}{dt}$, c'est à dire que $dx = v dt$. On intègre cette relation :

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v d\tau = v \int_{t_0}^t d\tau = v(t - t_0)$$

Et donc :

$$x = v(t - t_0) + x_0$$

Dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, le graphique de la position en fonction du temps est donc une droite.

Mouvements rectilignes uniformément accélérés

Un mouvement rectiligne uniformément accéléré est un mouvement dans lequel la vitesse est constante, le mobile se dirigeant en ligne droite. On choisit encore une fois le repère de manière à n'avoir qu'une coordonnée spatiale et on cherche encore la trajectoire.

En notant a l'accélération, on a sa vitesse en fonction du temps :

$$v = a(t - t_0) + v_0$$

Où v_0 est la vitesse «au départ», c'est à dire au temps t_0 . De même, la position en fonction du temps est donnée par la formule :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

On connaît la fonction ϕ donnant l'accélération en fonction du temps : $\phi(t) = a$. Sachant que $\phi(t) = \frac{dv}{dt}$ donc que $a = \frac{dv}{dt}$ et $dv = a dt$ ce qui donne :

$$v = \int_{t_0}^t a d\tau + v_0 = a(t - t_0) + v_0$$

Posons $t_0 = 0$ pour simplifier. On a : $v = at + v_0$. Ce qui donne $\frac{dx}{dt} = at + v_0$, c'est à dire $dx = [at + v_0]dt$ et on intègre :

$$x = \int_0^t [a\tau + v_0]d\tau + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Dans le cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré, le graphe de la position en fonction du temps est donc une parabole.

8.3 Relativité de Galilée

8.3.1 Idée générale

Imaginez. Vous vous retrouvez dans un bateau alors qu'il n'y a pas la moindre houle. Enfermé dans une cale, vous n'avez aucune fenêtre : vous ne pouvez rien savoir de ce qui se passe dehors. La mer étant parfaitement calme, vous ne ressentez aucun mouvement. La question est la suivante : est-il possible, par une quelconque expérience physique de calculer la vitesse du bateau par rapport au rivage ? La réponse à cette question mène au *principe de relativité*.

Dans votre bateau, vous pouvez faire toutes les expériences que vous voulez : observer la chute d'un objet, l'écoulement d'un fluide, des chocs entre des mobiles,... Rien ne pourra vous aider : *aucune expérience ne vous dira si votre bateau est immobile ou pas*. Quelque soit la vitesse du bateau par rapport au rivage, les expériences les plus précises du monde ne vont serons d'aucune utilité.

Il faut nuancer toutefois. Si le bateau accélère brutalement, vous le sentirez sans problème. De même, si il se trouve dans un virage, vous ressentirez les effets de la force

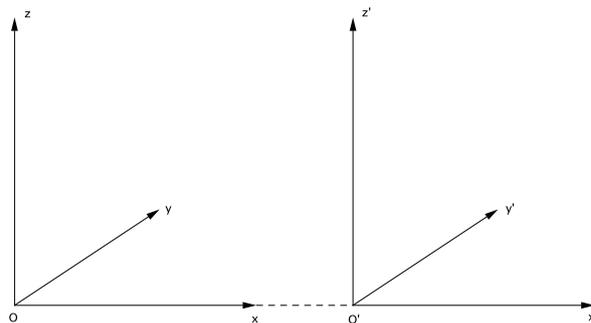
centrifuge. Vous n'aurez toujours aucune idée de sa vitesse, mais vous pourrez mesurer son accélération relativement facilement. Pour ne pas avoir à traiter ces cas, on va supposer que le bateau se déplace en ligne droite et que sa vitesse est constante. On dit dans ce cas que le référentiel du bateau est *galiléen* ou *inertiel*.

Le principe de relativité exclut l'existence d'un référentiel privilégié par rapport auquel on pourrait calculer sa vitesse (un référentiel au repos absolu). Dire que l'on se déplace à une certaine vitesse n'a de sens qu'en précisant par rapport à quel référentiel cette vitesse est mesurée. Certes, quand nous marchons, on peut dire qu'on se déplace à une certaine vitesse. Mais nous déplaçons nous par rapport à la terre ou la terre se déplace-t-elle par rapport à nous ? Galilée affirme qu'il n'y a *aucune* raison de choisir l'une ou l'autre de ces affirmations.

Cela se traduit par les équations qui permettent de passer d'un référentiel à l'autre. Elles montrent que les lois de la physique sont les mêmes pour tous les référentiels galiléens. Dans ce cas, le principe vu plus haut se justifie.

8.3.2 Transformations de Galilée

Prenons donc 2 référentiels, R et R' en mouvement par rapport à l'autre à la vitesse v (vitesse constante).



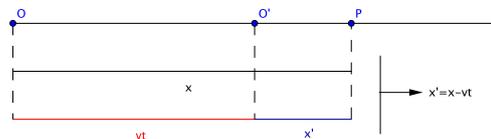
Le référentiel R a pour origine O et les axes x , y et z , et le référentiel R' a l'origine O' et les axes x' , y' et z' (voir figure). On voit que les axes x et x' sont alignés pour la simplicité des équations. Imaginons que O' s'éloigne de O à la vitesse v . Un point P à les coordonnées x , y et z dans R . Quelles seront ses coordonnées dans R' ?

Calculons d'abord la coordonnée x' :

Nous savons que vt est la distance entre O et O' .

c'est donc que (voir schéma ci-dessous qui ne montre que l'axe x x') :

$$x' = x - vt$$



Déplacer le référentiel suivant l'axe x n'as évidemment pas changer les coordonnées y et z :

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Enfin, Galilée ajoute :

$$t' = t$$

pour montrer que les coordonnées de temps sont les mêmes dans les 2 référentiels (ex : si un phénomène prend 2 minutes dans un référentiel, il prendra 2 minutes dans l'autre : le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels). Nous avons donc :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Ces relations s'inversent facilement :

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

8.3.3 Loi d'addition des vitesses

Voici une conséquence importante :

Un mobile se déplace à la vitesse v' dans le référentiel R' . Quelle est sa vitesse dans un autre référentiel, R se déplaçant à la vitesse V par rapport à R' ?

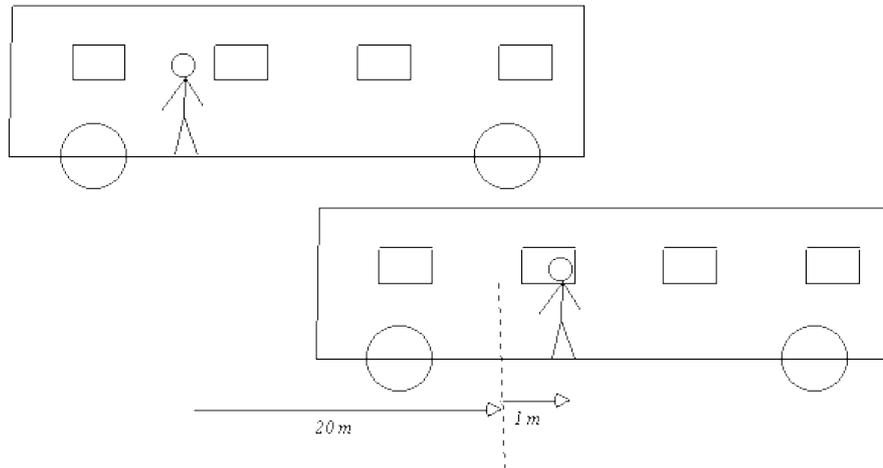
On calcule sa vitesse dans le référentiel R en calculant simplement la dérivée par rapport au temps :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + Vt')}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \frac{d(Vt')}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V \frac{dt'}{dt'} = v' + V$$

Car on a évidemment $v' = \frac{dx'}{dt'}$.

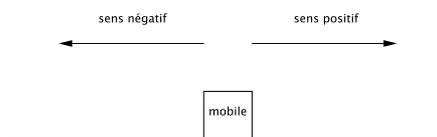
Exemple :

Imaginons un train roulant à la vitesse de 20 m/s, et un voyageur se déplaçant dans le couloir du train à 1 m/s, dans le sens de la marche du train. Sa vitesse par rapport à la terre est donc de $20+1=21$ m/s.



Sur ce schéma, tout se passe en une seconde. Les lignes en pointillé marquent la position du voyageur si il était resté immobile dans le train. Il s'est déplacé de 1 m dans le train, qui s'est lui même déplacé de 20 m. Le déplacement totale du voyageur est donc de 21 m, en 1s.

C'est la loi d'addition des vitesses. A l'inverse si le voyageur marchait dans le sens contraire du train, sa vitesse par rapport à la terre serait $20-1=19$ m/s donc dans ce cas on doit soustraire les vitesses. Mais en réalité, on peut dire aussi qu'on les additionnes si on pose que la vitesse du voyageur est négative. Plus précisément on impose un sens positif et un sens négatif pour les vitesses ce qui permet de garder une seule formule pour l'addition des vitesses.



Si le mobile va de gauche à droite, sa vitesse est positive, dans le cas contraire sa vitesse sera négative ce qui permet de garder une seule forme pour la loi d'addition des vitesses : additionner une vitesse négative au lieu de faire une soustraction.

8.4 Dynamique : notions de bases

8.4.1 Introduction

Jusqu'ici, nous avons fait de la cinématique, étudier le mouvement des corps sans s'occuper du pourquoi de leur mouvement, de la cause du mouvement. C'est ce que nous allons faire maintenant : la dynamique. Dans cette branche de la physique, on parle beaucoup des concepts de force et de masse, deux notions très importantes qu'il faut préciser. Tout d'abord, qu'est-ce que la masse ? Question très difficile en réalité car demandant une définition précise. Ce qui n'est pas simple avec la masse.

Il existe en réalité deux «masses différentes» : la masse grave et la masse inerte. La masse grave est celle qui intervient dans la force de gravitation, tandis que la masse inerte intervient dans la deuxième loi de Newton (voir plus loin). Le problème est de savoir pourquoi ces deux masses sont égales.

Disons simplement pour l'instant que pour un corps donné on peut lui associer un nombre m que l'on appelle la «masse» du corps. Nous avons comme propriété que la masse d'un corps est indépendante de sa vitesse et de sa position.

Le concept de «masse» amène tout naturellement le concept de quantité de mouvement.

8.4.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une notion très importante en mécanique. On peut simplement poser la définition, mais il peut être intéressant d'approcher cette notion de façon intuitive, et de justifier du même coup son appellation. On va dire tout d'abord que la quantité de mouvement (que l'on note par la lettre p) est proportionnelle à la vitesse v ce qui se note symboliquement :

$$p \propto v$$

Ce qui intuitif étant donné son appellation. Maintenant, supposons deux corps avec deux quantités de mouvement différentes. On peut dire (encore intuitivement) qu'il est plus «facile» de stopper le corps qui a le moins de quantité de mouvement. Effectivement, il est plus facile d'arrêter un objet lent qu'un objet rapide, mais on se rend compte aussi facilement que la masse joue un rôle important : pour deux mobiles à vitesses égales, il est plus facile de stopper le plus léger. On suppose donc que l'on peut écrire :

$$p = m \cdot v$$

Ou encore en considérant la quantité de mouvement comme un vecteur :

Définition 47. La quantité de mouvement d'un corps est sa masse multipliée par sa vitesse :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

On reviendra sur notre approche intuitive de la quantité de mouvement plus loin. Mais il n'est pas difficile de sentir déjà que la notion (intuitive) de force, est directement liée à la variation de la quantité de mouvement.

8.5 Première loi de Newton : principe d'inertie

8.5.1 Idée générale

La première loi de Newton s'énonce relativement facilement et est assez intuitive. On considère un corps sur lequel aucune force ne s'exerce. Quelles sont ses mouvements possibles dans un référentiel donné ?

La réponse que donnait Aristote était la suivante : en l'absence de force, aucun mouvement n'est possible. Il s'appuyait entre autre sur cette expérience : un objet que l'on lance horizontalement tombe et devient immobile assez rapidement. Plus aucune force n'agit sur lui et il s'immobilise. Pour Aristote donc, tout objet en mouvement subit une ou plusieurs forces.

Ce point de vue fut critiqué particulièrement au Moyen Âge où apparaît la notion d'impetus (qui est un peu l'ancêtre de la notion de quantité de mouvement). En effet, si on considère que l'on lance une pierre assez loin, il est vrai qu'elle finit par retomber mais que se passe-t-il pendant son trajet aérien ? Aristote répond et disant que c'est l'air qui «pousse» la pierre et permet son mouvement. La pierre laisse un vide derrière que l'air remplit et qui fournit une pression sur le mobile. Cette explication n'a évidemment pas tellement convaincu, mais plutôt que d'abandonner la physique d'Aristote (car ces réflexions s'inscrivent dans une théorie aristotélicienne plus globale avec des notions qui n'ont plus cours depuis longtemps comme la distinction entre le «mouvement naturel» et le mouvement «violent»), les penseurs du Moyen Âge l'ont adapté en ajoutant la notion d'impetus ; lorsque l'on lance une pierre, on lui donne une certaine quantité d'impetus qu'elle épuise au cours de son mouvement, et tombe lorsqu'elle n'a plus d'impetu.

On peut fournir une autre objection à cette idée. Supposons un corps immobile dans un référentiel, aucune force n'agit sur lui. On sait que la vitesse d'un objet n'est pas la même pour tous les référentiels (transformations de Galilée). Cela veut dire que dans un autre référentiel, le corps aura une certaine vitesse et suivant l'idée d'Aristote, il doit apparaître dans ce référentiel des forces qui n'existent pas dans l'autre ! Il faut faire attention ici qu'à *priori* ce n'est pas impossible. Mais dans un référentiel galiléen cela semble peu intuitif.

Revenons aux sources du problème. On observe effectivement qu'un corps lancé ou que l'on fait rouler sur le sol finissent par s'arrêter. Mais n'y a-t-il vraiment aucune force qui agissent ?

C'est Galilée qui le premier, a répondu à cette question. Considérons par exemple, un objet que l'on fait glisser sur une table. L'expérience montre que l'objet s'arrête rapidement (d'où la théorie d'Aristote). Maintenant, faisons rouler une balle sur une table. Elle finira par s'arrêter (on suppose une très longue table) mais il lui faudra un temps vraiment très long. Quelle est la différence entre les deux situations ?

La réponse est simple et intuitive : le frottement du mobile sur la table n'est pas le même dans les deux cas. Dans le cas de la balle qui roule, le frottement est très faible. On comprend facilement pourquoi le mouvement s'arrête : ce n'est pas parce qu'aucune force n'agit sur le mobile comme le pensait Aristote, mais bien parce que justement il y a une force qui le ralentit (la force de frottement). On voit que la balle parcourt une grande distance, en imaginant un cas idéal où il n'y a *aucun* frottement, la boule continue à la même vitesse indéfiniment !

8.5.2 Énoncé du principe

Des réflexions précédentes, on peut en tirer le principe d'inertie : lorsqu'aucune force n'agit sur un objet sa vitesse reste constante (sa vitesse est éventuellement nulle). Attention comme souvent en physique on sous entend «dans un référentiel galiléen» :

Tout corps persévère dans son mouvement rectiligne et uniforme, dans son état de repos et dans sa forme tant qu'aucune force n'agisse sur ce corps.

8.5.3 Quelques remarques :

Réfléchissons un instant sur l'énoncé du principe. On nous dit qu'un corps est en mouvement rectiligne uniforme tant qu'aucune force n'agit sur lui. Mais ici se pose une question toute simple : qu'est ce qu'une force ? On en a encore donné aucune définition, pour l'instant on utilise uniquement ce terme dans un sens intuitif. Il sera donc utile de préciser cette notion.

Toutefois, le principe d'inertie permet de définir partiellement ce concept. En effet, il ne définit pas ce qu'est une force mais il définit... la notion d'absence de force ! C'est déjà quelque chose d'utile car dans la définition que l'on doit donner à la force, on sait déjà qu'on ne peut avoir de force pour un corps en mouvement rectiligne uniforme. Nous allons donc tout de suite définir un peu plus précisément la notion de force.

8.6 Deuxième loi de Newton : loi fondamentale de la dynamique

8.6.1 Idée générale

Imaginez. On dispose d'un corps massif suffisamment isolé du monde pour que l'on ne considère qu'une seule force agissant sur lui. Avant que l'on ne fasse agir une force sur lui, le principe d'inertie nous dit que sa vitesse est constante et sa trajectoire rectiligne. On commence à faire agir une force. Avec ce qu'on sait du principe d'inertie, soit sa vitesse ne sera plus constante, soit sa trajectoire ne sera plus rectiligne (ou les deux à la fois).

On peut traiter en même temps les cas du changement de vitesse et du changement de direction. En effet, dans les deux cas, on a une variation du vecteur vitesse, ce qui veut dire que dans les deux cas le vecteur accélération est non nul. Il faut faire attention au fait que pour un objet ayant une vitesse constante mais une trajectoire courbe, il a bien une accélération non nulle !

L'effet de la force sur l'objet est donc de lui fournir une certaine accélération. Si on reprend notre approche intuitive de la notion de quantité de mouvement, on peut intuitivement supposer que la force correspond à la variation de la quantité de mouvement, ou plus précisément à sa dérivée. On a donc envie d'écrire :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

La force est donc proportionnelle à l'accélération, ce qui n'est intuitivement pas surprenant.

On va convenir de généraliser cela de façon à pouvoir traiter le cas où l'on a plusieurs forces. Il suffit pour cela de postuler que l'on puisse simplement additionner vectoriellement les forces :

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_{i=1}^N F_i$$

8.6.2 Énoncé

La force totale exercée sur un corps est égale au produit de sa masse m et de son accélération a :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

8.7 Troisième loi de Newton : loi de l'action et de la réaction

8.7.1 Énoncé

Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B .

8.7.2 Quelques remarques

Cette loi est très simple à comprendre. On peut prendre plusieurs exemples : je lance un objet lourd et je sens une force qui me pousse en arrière, ou encore l'exemple très connu de la fusée : la fusée éjecte des gaz avec une certaine force ce qui permet sa propulsion (car la troisième loi de Newton dit que dans ce cas les gaz exercent une force sur la fusée).

On pourrait conclure alors qu'il est impossible de tirer un chariot : comment peut-on faire puisque si on exerce une force sur le chariot, il exercera une force égale mais opposée ?

La réponse est simple : la force que l'on exerce sur le chariot est bien la même que la force que le chariot va exercer sur nous, mais l'effet de ces deux forces sera différente :

1. Le chariot va avancer sous l'effet de la force et il y aura peut de frottement, car il est sur roues,
2. Nous allons avancer car la force que le chariot exerce sur nous est compensée par le fait que nous allons exercer une force sur la Terre elle même. C'est par l'intermédiaire de nos pied que l'on pousse sur le sol, et c'est donc par le sol que l'on «évacue» la force que tend à nous empêcher d'avancer. C'est encore le principe d'action-réaction : on pousse sur la Terre avec notre pied et la force de réaction de la Terre sur nous nous fait avancer !

8.8 Conservation de la quantité de mouvement

Supposons un grand nombre N de particules, ayant des quantités de mouvement \vec{p}_i . On va définir la quantité de mouvement totale du système, comme la somme vectorielle des quantités de mouvement de toute les particules :

$$\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 29. *La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante au cours du temps.*

Par «isolé», on entend par là qu'il n'existe aucune interaction avec une particule (ou quoi que ce soit d'autre) en dehors du système.

Démonstration : on veut donc montrer que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale est nulle. On a :

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \frac{d(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Si on note \vec{F}_{kl} la force exercée par la particule k sur la particule l , alors on a :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki}$$

Notons ensuite que la troisième loi de Newton, on a :

$$\vec{F}_{kl} = -\vec{F}_{lk}$$

Et donc :

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki} = \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ki} + \sum_k \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_{k \neq i} (\vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ik}) \right) = 0$$

Où l'on utilise d'abord le fait que l'on peut librement renommer les indices de sommations, puis on utilise le fait que :

$$\sum_k \sum_{i \neq k} (...) = \sum_i \sum_{k \neq i} (...)$$

C'est à dire que l'on peut sommer d'abord sur i puis sur k , où l'inverse.

Notons que l'on peut généraliser facilement ce théorème dans le cas où l'on a des forces extérieures \vec{F}_i , on a alors :

$$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{EXT}$$

Où \vec{F}_{EXT} est la somme des forces extérieures.

Chapitre 9

Electromagnétisme

9.1 Introduction

Les phénomènes dits «électrostatiques» sont connus des scientifiques et philosophes depuis l'antiquité. Les Grecs avaient constatés qu'en frottant de l'ambre jaune, cette ambre pouvait attirer des corps légers. D'ailleurs, le mot «électricité» vient du grec «elektron », qui signifie ambre. On peut faire la même expérience très facilement en utilisant du plastique à la place de l'ambre.

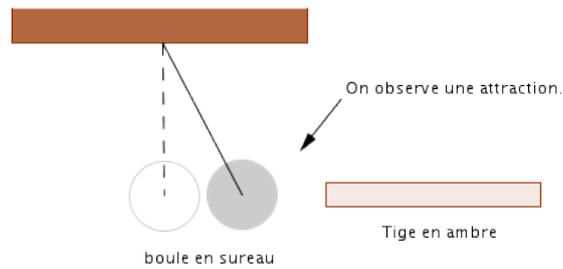
Nous allons tout d'abord tenter d'expliquer cette attraction avec des expériences plus précises. la plupart d'entre vous je pense, ont déjà vu ces expériences à l'école (les fameuses petites boules en sureau ou en polystyrène suspendues par des fils) et ça n'est pas la peine de reparler de ces expériences trop longtemps, je rappellerai brièvement le principe de ces expériences pour ceux qui ne les connaîtrai pas ou plus.

L'électrostatique est relativement simple à aborder au départ, c'est seulement après (électromagnétisme...) que les choses vont se compliquer. Il est donc important de comprendre les bases, sans quoi il ne sera pas possible de comprendre la suite.

9.2 Notions de bases

9.2.1 Les phénomènes électrostatiques

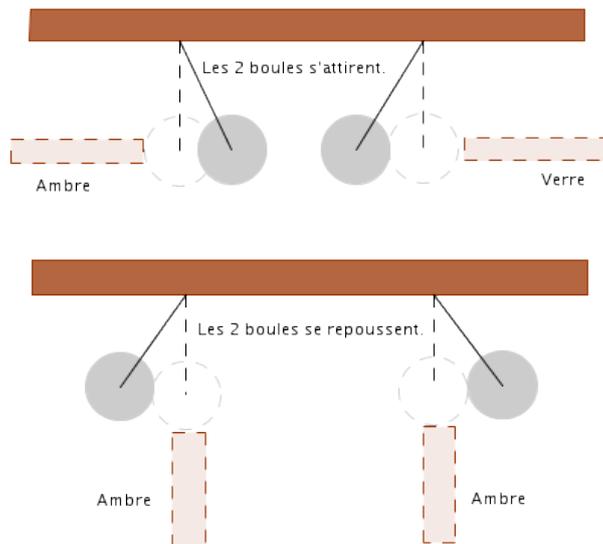
On décide donc de faire une série d'expériences pour tenter de mieux comprendre ces phénomènes électriques. On a une petite boule (de sureau par exemple), et on y approche une tige d'ambre frotté : la boule est attirée.



On constate une attraction, les propriétés de l'ambre ont été modifiées par le fait qu'on l'ai frotté.

Nous pouvons faire la même expérience en remplaçant l'ambre par du verre. On constate le même résultat. Là où ça devient intéressant, c'est que si vous approchez les deux tiges (de verre et d'ambre) en même temps, il ne se passe rien.

On peut alors émettre l'hypothèse que dans ce cas précis, chaque tige a annulé l'effet de l'autre. On va dire, par convention, que le verre contient de l'électricité positive, et que l'ambre contient de l'électricité négative. Ce serait pour cela que si on approche deux tiges frottées en même temps, on ne constate rien, c'est possible, mais il faut vérifier cette hypothèse par une autre expérience.



Dans cette deuxième expérience, on met une des boules en contact avec de l'ambre et l'autre avec du verre. Puis on constate qu'elles s'attirent. Ensuite, on refait la même expérience, mais en les mettant en contact avec la même substance (dans le dessin ci-dessus c'est de l'ambre mais ça peut être du verre : on constate le même résultat), on constate alors qu'elles se repoussent (entre les deux expériences, il faut évidemment décharger les deux boules).

Ceci prouve plusieurs choses :

1. il y a bien deux «sortes» d'électricité différentes,
2. l' électricité peut passer d'un corps à l'autre par simple contact,
3. les phénomènes électrostatiques sont attractifs ou répulsifs.

On suppose alors que puisque l'électricité peut passer d'un corps à l'autre, «quelque chose» de concret passe grâce au contact.

En utilisant des balances extrêmement précises, on ne parvient pas à mettre en évidence une variation de masse entre un objet au moment où il est électrisé et au moment où il ne l'est pas.

On émet alors l'hypothèse qu'il existe des particules dans la matière, libre de se déplacer d'un corps à l'autre, et portant une certaine charge électrique q , positive ou négative, et de plus, ces particules doivent être suffisamment légères vu qu'on ne constate pas de variation de masse.

9.2.2 Loi de Coulomb

Remarquez ici l'introduction d'une quantité q (la «charge électrique ») qui est une quantité relative à la «quantité d'électricité» (pour l'instant on raisonne intuitivement) dans un corps. Si le corps n'est pas électrisé, on écrit $q = 0$. Dans le cas contraire, q a une certaine valeur, positive ou négative.

Supposons que nous avons une charge électrique de référence, disons par exemple q . On a deux autres charges q_1 et q_2 . On approche q_1 de q et on mesure une force électrique F_1 (attraction ou répulsion, peu importe). Ensuite, on fait la même chose avec q_2 , et on mesure F_2 .

Nous dirons, *par convention*, que la force est proportionnelle à la charge électrique (il faut bien se baser sur quelque chose pour définir la charge électrique). On a donc (k_q est une constante qui dépend de q) :

$$F_1 = k_q q_1$$

de même que :

$$F_2 = k_q q_2$$

Ensuite, on se peut se demander ce qui se passe quand on met en présence uniquement q_1 et q_2 , on aura une force à la fois proportionnelle à q_1 et à q_2 :

$$F = k q_1 q_2$$

Il reste une constante k qui n'est pas vraiment une constante car on n'a pas encore pensé à une chose : la distance entre q_1 et q_2 . Plus cette distance est grande, plus la force électrique est faible.

Le physicien Français Coulomb a fait une série d'expériences sur la force électrique et a montré que cette force était inversement proportionnelle à la distance entre les charges, de plus la force est dirigée selon la droite qui relie les deux charges (même remarque qu'en mécanique : on considère des corps ponctuels).

En regroupant toutes les remarques précédentes on arrive à la conclusion :

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ou r est la distance entre les charges et K une constante universelle.

Mais ça n'est pas tout. Pour des raisons de simplicité (pour des formules plus complexes tels que les équations de Maxwell) on pose :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$$

et donc finalement (j'en profite pour mettre la forme vectorielle) :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

C'est la loi de Coulomb.

L'unité que l'on a donné à la charge est, justement, le Coulomb. En réalité, ce n'est pas une unité «de base» comme la seconde par exemple, mais on ne peut encore la définir à ce stade car il faut connaître la définition de l'ampère pour cela.

ε_0 est la permittivité électrique du vide et est à peu près égale à $8,85 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ ce qui entraîne que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 NC^{-2} m^{-2}$. On dit bien du vide, car dans un autre milieu comme l'air, la permittivité est différente (la formule ci dessus n'est valable que dans le vide).

Dans un milieu quelconque, la permittivité électrique est toujours un plus élevée que dans le vide. On a donc un coefficient ε_r , la permittivité électrique relative, tel que :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

Ainsi on connaît la valeur de ε_r pour tout les milieux possibles, et quand, dans la pratique, on a besoin de calculer une permittivité, on consulte une table de permittivité électrique relative.

9.2.3 Structure de la matière

Revenons un instant sur une remarque faite plus haut à propos d'hypothétiques particules porteuses d'électricité. En 1909, une expérience de Robert Milikan montre que toute charge électrique est quantifiée. Qu'est ce que cela veut dire ? Tout simplement que si on a une charge q donnée, on a toujours :

$$q = n \cdot e$$

ou n est un nombre entier, et e une constante approximativement égale à $1,6 \cdot 10^{-19} C$. Ce résultat valide l'hypothèse de particules porteuses d'électricité.

Avant même le résultat de Milikan, en 1897, le physicien Joseph John Thomson découvre l'existence de l'électron. Il faisait des expériences sur les rayons cathodiques : ces «rayons», très étudiés à l'époque, méritent une petite parenthèse.

Ils furent découverts en 1876. Une simple expérience permet de les observer. On a un tube dans lequel on fait le vide le plus parfait possible, et dans ce tube, deux électrodes : l'une positive et l'autre négative. Dans le tube, une lueur violacée apparaît. Ce sont les rayons cathodiques. Ce qui est particulièrement intéressant, c'est que ces rayons proviennent de la matière elle-même (ici d'une cathode). Ce qui constitue ces fameux rayons se trouve donc *dans* la matière en temps «normal».

Beaucoup d'expériences ont été faites. Thomson a montré que les rayons cathodiques sont en fait constitués de petites particules, légères, et chargées négativement. On les a appelées «électrons».

Ce résultat ainsi que celui de Milikan montre que les électrons sont responsables du fait que l'électricité puisse passer d'un corps à l'autre. Ils ont évidemment une charge égale à $-1,6 \cdot 10^{-19}C$, la charge élémentaire calculée par Milikan. Ils sont présents partout, dans tout les objets de la vie courante.

Maintenant, il est évident que la matière n'est pas constituée uniquement d'électrons, sinon tout les objets du monde seraient chargés négativement. Diverses réflexions sur les fluides ont conduits bon nombres de chimistes à émettre l'hypothèse que la matière est constituée d'atomes, en particulier John Dalton. Il pensait que les atomes sont indivisibles, comme Démocrite avant lui. Thomson connaissaient la théorie atomique quand il a découvert l'électron, cette théorie était acceptée par tous à cette époque, et il devait en tenir compte.

Il imagina donc un nouveau modèle atomique. Il imagina que les atomes sont des sortes de «billes» chargées positivement avec des électrons «enfoncés» dedans, à la manière d'un pain aux raisins, ou les raisins représentent justement les électrons. Puisque les électrons sont «collés» à une «substance» positive, l'atome est globalement neutre (en temps «normal» on constate tous que la matière est neutre, on n'observe pas en permanence des phénomènes électrostatiques).

Certaines réflexions théoriques ont conduit Rutherford à modifier cette vision de l'atome. Il affirme alors qu'en réalité les atomes ont un noyau chargé positivement autour duquel tournent les électrons, maintenus sur leur orbite par la force de Coulomb (tout comme la force gravitationnelle maintient la lune en orbite autour de la terre).

Ces réflexions sur la structure de la matière pourront nous aider par la suite.

9.2.4 Le champs électrique

Imaginons une charge q en un point donné de l'espace. Si on approche une autre charge dans un certain volume entourant la charge q , on va constater une force de Coulomb.

Cette simple constatation peut paraître banale. Mais le caractère apparemment non-local de ce phénomène pose question. Puisque les objets chargés se comportent différemment au voisinage de la charge q , cela veut tout simplement dire que les propriétés de l'espace ont été modifiés par la charge. On dit que la charge crée un *champs électrique*.

On va donc dire qu'à chaque point de l'espace autour de q , il existe un vecteur \vec{E} , le vecteur champs électrique. Le champ électrique est donc un champs vectoriel.

On va donc poser que :

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}(M)$$

Ou \vec{F} est évidemment la force de Coulomb, et q_1 la charge qui subit la force au point M (car plongée dans le champs électrique).

En identifiant avec la formule de Coulomb, on obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

Désormais, on utilisera tout le temps cette notion.

On peut se demander ce qui se passe quand il y a plusieurs charges au lieu d'une, quel est le champs engendré par cet ensemble de charges ?

La réponse est simple : il faut en tout point additionner les vecteurs champs : c'est le principe de superposition.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$