Analyse

Roland Christophe

26 février 2017

Table des matières

1 Introduction

1.1 Les paradoxes de Zénon d'Elée

Zénon d'Elée était un philosophe grec né vers -495. Il était l'élève de Parménide et soutenait sa doctrine : Parménide pensait que tout mouvement est impossible ou n'est qu'illusion. C'était une conclusion basée sur des raisons assez étranges, sur l'unicité de l'Être : Parménide affirme que la pluralité n'existe pas et par conséquent le mouvement non plus.

Zénon va tenter de prouver ce point de vue en énonçant plusieurs paradoxes sur le mouvement des corps. Le plus connu de ces paradoxes (et le plus difficile à résoudre) est le fameux paradoxe d'Achille et de la tortue.

Ces paradoxes sont nombreux et sont pour la plupart assez faciles à réfuter. Voici trois des plus célèbre de ces paradoxes :

1. Le paradoxe d'Achille et de la tortue que nous analyserons plus loin,
2. Le paradoxe de la pierre lancé vers un arbre : une pierre lancée vers un arbre ne pourra jamais l'atteindre car avant cela elle devra parcourir la moitié du parcours, mais pour cela elle devra d'abord parcourir la moitié de cette distance (donc le quart de la distance totale), et ainsi de suite : la flèche n'ateindra jamais son objectif (remarque : ce paradoxe est fondamentalement identique au précédent comme nous le verrons),
3. Enfin, le paradoxe de la flèche en vol : imaginons une flèche en vol. A chaque instant, elle occupe une position bien précise et si on l'observe la flèche sur un seul instant infiniment bref, elle n'a pas le temps de bouger, et une succession de position fixes ne peut engendrer un mouvement : la flèche ne peut donc pas bouger ! (on reparle de ce paradoxe dans la partie «Fonction dérivée» de ce cours).

Il faut remarquer que ces «paradoxes» sont a proprement parler des sophismes.

1.2 Qu'est ce que l'analyse ?

L'analyse mathématique est l'étude rigoureuse du «calcul infinitésimal». Les termes d'«analyse» et de «calcul infinitésimal» sont en fait des synonymes, le premier terme étant plus moderne et tendant à remplacer le second. Mais l'expression «calcul infinitésimal» n'a pas seulement un intérêt historique, il a aussi un certain intérêt pédagogique.

En effet, il faut essayer de comprendre qu'est ce que l'on entend par «infinitésimal». Pour le comprendre, nous allons adopter un point de vue historique et discuter de la forme la plus ancienne de «calcul infinitésimal», ou plus exactement, quelque chose qui y ressemble : c'est la méthode d'exhaustion, utilisée par les grecques durant l'antiquité.

Cette méthode était par exemple utilisée pour calculer la surface d'un disque. On encadrait un disque en construisant un polygone régulier à l'intérieur du disque, et un autre englobant le disque. En calculant les surfaces respectives de ces deux polygones, on savait que la surface du disque était quelque part entre ces deux valeurs. Puis, en augmentant le nombres de côtés de deux polygones, on approchait de plus en plus de la surface, et l'encadrement devenait de plus en plus précis.

La chose intéressante est qu'il est possible de déduire la surface exacte du disque. Il suffit en effet d'augmenter le nombre de côtés à l'«infini», c'est à dire que l'on considère un cercle comme un polygone régulier ayant un nombre infini de côtés, chacun de ces côtés ayant une longueur nulle. On pourrait croire qu'une telle chose est impossible à calculer mais nous verrons qu'il n'en est rien.

La suite du chapitre a donc deux buts : formaliser ce genre de raisonnement, et comprendre mieux les pièges et les subtilités que l'on rencontre lorsque l'on parle d'infini.

2 Intervalles dans l'ensemble des réels

2.1 Définition

On va définir maintenant la notion d'intervalle. Une définition intuitive de cette notion est simplement l'ensemble des valeurs comprises entre deux valeurs distinctes. Il faut simplement faire attention de savoir si ces deux valeurs sont comprises ou non dans l'intervalle.

Par exemple, si on dit : «l'ensemble des nombres réels entre 2 et 3 compris», on écrit :

$$[2, 3]$$

et si on exclu 2 et 3 de cet ensemble, on écrit plutôt : $]2, 3[$ on peut aussi exclure 2 et inclure 3 :

$$]2, 3]$$

ou l'inverse :

$$[2, 3[$$

Il est possible de définir plus rigoureusement cette notion à l'aide ce que nous avons appris en théorie des ensembles :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

Les intervalles de type $[a, b]$ sont dits *fermés*, les intervalles de type $]a, b[$ sont dits *ouverts* et les intervalles comme $]a, b]$ ou $[a, b[$ sont dits *semi-ouverts*.

Le symbole ∞, qui représente l'«infini» est utile pour représenter certains intervalles. Par exemple, on note l'ensemble des nombres «supérieurs ou égals à deux» : $[2, +\infty[$, l'ensemble des nombres strictement inférieurs à 4 est $] - \infty, 4[$.

On rajoute donc aux définitions faites plus haut :

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}|x>a\}$$
$$]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}|x\leq a\}$$
$$]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R}|x<a\}$$

2.2 Propriétés

On peut montrer que :

1. l'intersection de deux intervalles est encore un intervalles, par exemple $]-\infty,10]\cap[2,20]=[2,20]$,
2. l'union de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle, par exemple $[0,1]\cup[3,4]$ n'est pas intervalle.

3 Achille et la tortue

3.1 Énoncé

Le paradoxe est facile à énoncer. Imaginez une course que se disputent Achille et la tortue. Achille qui sait bien qu'il part avec un avantage certain sur son adversaire lui laisse une avance de 100 mètres. La course commence. Pour rattraper son retard, il parcourt les cent mètres qui le séparent de la tortue. Pendant ce temps, la tortue a elle même avancé d'une certaine distance, qu'Achille doit combler à nouveau. Une fois ce retard comblé, la tortue avance à nouveau d'une certaine distance, etc,... Achille ne rattrape donc jamais la tortue.

On va donc tenter de résoudre ce paradoxe mathématiquement. Tout d'abord, on va supposer qu'Achille parcourt le cent mètres en dix secondes, et que la tortue parcourt un mètre en une seconde :

1. Durant les dix premières secondes, Achille a parcouru 100 m et la tortue a parcouru 10 m, il est donc à 10 m de la tortue (temps écoulé : 10 s),
2. Pour parcourir cette distance, Achille met une seconde, temps pendant lequel la tortue avance d'un mètre (temps écoulés : 10+1=11 s),
3. Pour parcourir ce mètre, Achille met 0.1 s, la tortue avance donc de 10 cm (temps écoulé : 11+1/10)
4. etc...

On peut écrire alors que le temps total pour qu'Achille rejoigne la tortue est :

$$t=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$$

Cette somme comporte un nombre infini de termes : elle ne s'arrête jamais. Zénon en conclut que le résultat est alors infini : Achille ne rejoindra jamais la tortue.

Autrement dit, Il fait l'hypothèse que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty$$

quel que soit la valeur des a_i : une somme est infinie dès qu'il y a un nombre infini de termes (tous positifs évidemment).

3.2 Résolution du paradoxe : première approche

Pour résoudre le problème, on peut d'abord remarquer que la somme peut s'écrire autrement : on l'écrira avec des nombres décimaux :

$$t = 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + ... = 11.111111...$$

On voit que l'on arrive à un résultat parfaitement fini ! !

Donc l'hypothèse de Zénon semble être fausse bien qu'elle est intuitive, on voit que l'on peut avoir *une somme infinie de terme avec un résultat fini* !

Maintenant nous allons tenter de résoudre le paradoxe. Pour cela, on va essayer déterminer en combien de temps Achille va rattraper la tortue, mais d'une tout autre manière que Zénon.

Après un certain temps t, Achille aura parcouru une distance $d_{ach} = v_{ach}t$ (car on a $v_{ach} = \frac{d_{ach}}{t}$ par définition de la vitesse) tandit que la tortue aura parcouru une distance $d_{tor} = v_{tor}t$ et sera donc à $d_{tor} = v_{tor}t + 100$ du point de départ d'Achille.

Achille rejoindra la tortue lorsque $d_{ach} = d_{tor}$, donc on aura, d'après les équations précédentes :

$$v_{ach}t = v_{tor}t + 100$$

Nous connaissons v_{ach} et v_{tor}, et nous savons que :

$$v_{ach} = 10v_{tor}$$

et donc :

$$10v_{tor}t = v_{tor}t + 100$$

c'est une simple équation du premier degré en t qui donne :

$$t = \frac{100}{9v_{tor}}$$

Dans notre cas, $v_{tor} = 1m/s$ et donc $t = \frac{100}{90} = 11.111...$

Intéressons nous donc cette fameuse somme de plus près...

4 Suites numériques

4.1 Définissons la notion de suite

Si cette somme reste finie, c'est parce que les termes se rapprochent de plus en plus de zéro (et suffisamment vite) :

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, ...$$

On peut associer un nombre n à chaque terme de la suite, pour dire que le terme a_n est le n-ième terme de la suite (ce genre de notation a été déjà vu précédemment) :

$$a_1 = 10, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{10}, ..., a_n = \frac{1}{10^{n-2}}$$

$\frac{1}{10^{n-2}}$ est le n-ième terme de la suite.

Le fait que cette suite se rapproche de zéro sera discuté plus tard. Avant cela, je propose de préciser ce que l'on doit entendre par «suite». Ouvrons donc une petite parenthèse, et définir correctement la notion de suite :

Définition 1. *Une* suite numérique *est une fonction* $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *c'est à dire qu' à chaque nombre naturel* n*, on fait correspondre un réel* a_n *qui est le n-ième terme de la suite. Elle est notée* $a_1, a_2, a_3, ...$ *ou plus simplement :*$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Voici quelques exemples de suite :

1. $a_n = 1 + n$ ce qui donne : $2, 3, 4, 5, ...$
2. $a_n = 2^n$ ce qui donnes : $2, 4, 8, 16, ...$
3. Suite de Fibonacci : $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ ce qui donne : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$

On peut aussi définir deux ou trois choses simples sur les suites :

1. Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

   et strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
2. Une suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$$

   et strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
3. On dit qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante, et qu'elle est strictement monotone si elle strictement (dé)croissante.
4. Une suite est bornée supérieurement si on peut trouver un réel α tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq \alpha$

5. Une suite est bornée inférieurement si on peut trouver un réel α tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq \alpha$
6. Enfin, une suite est bornée si elle est à la fois bornée supérieurement et inférieurement.

Exemples :

1. La suite de Fibonacci est croissante, donc monotone, elle est bornée inférieurement.
2. La suite $1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$ n'est pas monotone, elle est bornée.
3. La suite $a_n = 5 - \frac{1}{n}$ est croissante et bornée.

4.2 Introduction au concept de limite

Nous avions dit que la suite qui nous préoccupait se rapproche de zéro. Notons au passage qu'elle est strictement décroissante et bornée. Mais ce qui nous intéresse surtout dans le fait qu'elle soit bornée ; c'est qu'elle est bornée *inférieurement.* Pourtant, elle est décroissante, mais elle ne ne va jamais en dessous (ni n'atteint !) une certaine valeur : zéro.

En supposant *n ÉNORMÉMENT GRAND*, a_n sera *TRÈS PROCHE* de zéro. Pourtant, *il ne l'atteindra jamais*, zéro sera une limite.

Et on ne peut pas prendre 0.00000000001 comme limite, ni même 10^{-1000} car on pourra toujours trouver un nombre n assez grand, tel que a_n soit plus proche de zéro que cette limite (qui du coup n'en n'est pas vraiment une).

On dira donc, que lorsque *n tend vers l'infini*, a_n tend vers zéro, et on notera :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

On peut trouver d'autre suites intéressantes. Par exemple, pour la suite $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ la suite est croissante et tend vers 1 :

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, ...$$

et on peut donc écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$$

Imaginons une suite qui tende vers un nombre a. Prenons un terme a_n tel que n soit très très grand (mais vraiment très !). Cela veut dire que la «distance» entre a_n et a est TRÈS petite (presque nulle) :

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Ou :

$$\epsilon > 0$$

et ce fameux ϵ est choisi TRÈS petit pour montrer que cette distance entre entre a_n et a est vraiment infime.

On peut aussi prendre un autre nombre a_n, mais ou cette fois n est encore plus grand, et choisir un ϵ encore plus petit et ainsi de suite mais ça ne servira à rien et cela va nous mener loin !

Pourtant l'idée d' écrire :

$$|a_n - a| < \epsilon$$

avec :

$$\epsilon > 0$$

pour montrer que a est la limite de la suite ne semble pas mauvaise mais il faut améliorer. Comment ? On ne peut pas examiner chaque a_n séparément et trouver à chaque fois un ϵ adéquat. Pourtant, on peut le faire implicitement à l'aide du quantificateur universel ! Ça donne :

Définition 2. *Une suite numérique* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une* limite a *si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta \in \mathbb{N} : n > \delta \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Explications : On commence par dire que l'on peut prendre n'importe quel $\epsilon > 0$ (sous entendu : aussi petit soit-il), et dire qu' il existe un nombre (représenté par la lettre grecque δ) tel que si on prend un nombre n plus grand que δ, la distance entre a_n et a est plus petite que ϵ.

Prenons, par exemple, la suite $a_n = \dfrac{1}{n}$ (qui admet 0 comme limite) et commençons par choisir un nombre ϵ positif (assez petit), disons, $\dfrac{1}{100}$. Puis, examinons l'un après l'autre les termes de la suite. Au bout d'un certains temps, on arrive au terme $a_{100} = \dfrac{1}{100}$. On va donc prendre $\delta = 100$. Si on choisit un nombre n tel que $n > \delta$, on est sur que :

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Par exemple, si on choisit $n = 200$, on a $a_n = \dfrac{1}{200}$ et on voit bien que :

$$\left|\frac{1}{200} - 0\right| < \frac{1}{100}$$

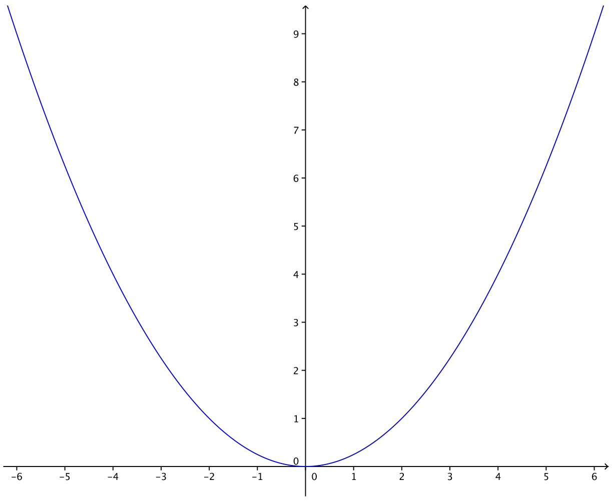
Cette définition veut simplement dire que passé un certain cap (a_δ), tout les termes de la suite sont plus proches de a que d'une certaine valeur fixé au départ (ϵ). Comme ϵ est aussi petit que l'on veut, on fait se rapprocher les termes de a d'aussi près que l'on veut. La suite devient très proche de sa limite, pour de très grandes valeurs de n.

5 Fonctions numériques

5.1 Introduction

La notion de fonction a déjà été vue de manière assez théorique dans le cours de théorie des ensembles. On avait alors introduit le concept de «graphe» comme un ensemble de couples. Dans la pratique, il est commode de représenter ces couples de manière géométrique.

Prenons un exemple : une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ défini comme suit : $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$. On peut représenter le graphe de la fonction dans un système d'axe :



Chaque point de la courbe a deux coordonnées qui sont les couples du graphe.

Le graphique d'une fonction permet d'observer directement ses propriétés. Nous allons maintenant définir quelques notions supplémentaires par rapport à ces fonctions numériques :

1. Une fonction est croissante sur un intervalle I si :
$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$
2. Une fonction est décroissante sur un intervalle (a, b) si :
$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$
3. Une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante
4. Les termes strictement (dé)croissante et strictement monotone, s'appliquent lorsque les inégalités sont strictes (comme pour les suites).

5.2 Fonctions continues

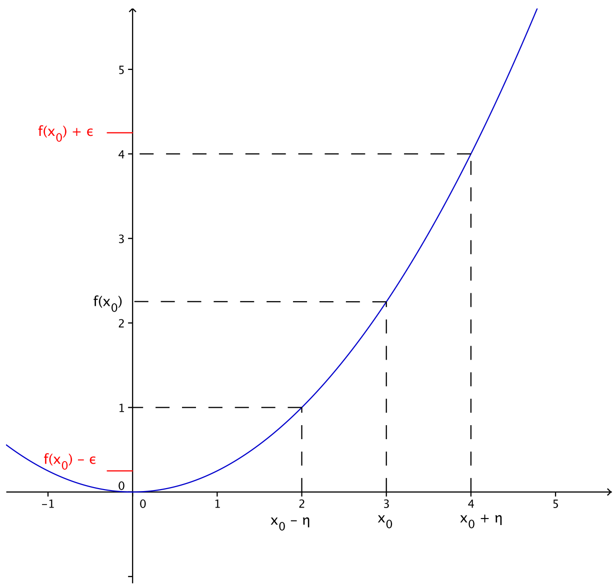
Nous allons commencer par définir de manière formelle une fonction continue. Si vous ne comprenez pas la définition du premier coup il ne faut pas s'inquiéter : elle n'est pas très évidente mais j'expliquerai cette définition juste après.

Définition 3. *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est* continue *en* $x_0 \in I$ *si :*

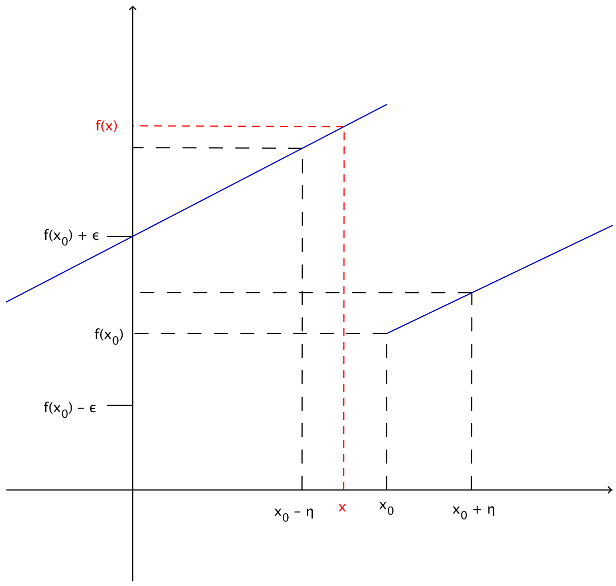
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue à chaque point de cet intervalle.

On commence par dire que l'on peut prendre n'importe quel $\epsilon > 0$ (sous entendu : aussi petit soit-il), et qu'il existe un nombre η (pour cette valeur de ϵ), tel que (x appartenant à I), si la «distance» entre x et x_0 est plus petite que η, alors la «distance» entre $f(x)$ et $f(x_0)$ est plus petite que ϵ :



Pour bien montrer ce que cela veut dire, il suffit de voir une fonction non continue :



La fonction est ici tracée en bleu pour plus de lisibilité.

On voit bien que la fonction n'est pas continue en x_0 : une fois avoir choisi un ϵ positif, quelque soit le nombre η que l'on prend, certaine images se seront pas dans l'intervalle $]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$. Dans le schéma, un tel nombre x est en évidence, ainsi que son image (en rouge). Même si on choisissait un autre η plus petit, on arriverai toujours à avoir des images qui «sortent» de l'intervalle $]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$: la fonction n'est pas continue.

On peut définir très simplement la continuité d'une fonction sur un intervalle : une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue à chaque point de cet intervalle.

Si vous avez bien compris la définition d'une fonction continue, vous pouvez facilement comprendre qu'il est facile de savoir si une fonction est continue ou pas rien qu'en regardant son graphe : une fonction est continue si on peut la tracer sans «lever le crayon».

On peut trouver facilement des exemples de fonctions non continues : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ ou encore $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.

Si f et g sont continues sur I, alors (sur l'intervalle I) :

1. $f + g$ est continue,
2. $f \cdot g$ est continue,
3. $\dfrac{f}{g}$ est continue (à condition que $\forall x \in I, g(x) \neq 0$).

5.3 Limites de fonction

A partir de la définition de la continuité, on peut facilement étendre le concept de limite de suite pour le cas des fonctions. On a la définition suivante :

Définition 4. *Définition : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a pour* limite *L au point $x_0 \in I$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

et on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Cela veut dire que si x se rapproche de x_0 (on a en effet $|x - x_0| < \eta$), alors $f(x)$ se rapproche de L ($|f(x) - L| < \epsilon$).

On va prendre un exemple numérique comme nous l'avions fait avec les suites. Prenons par exemple, $f(x) = \dfrac{x}{2}$ pour faire simple. On choisit un epsilon assez petit, disons $\epsilon = \dfrac{1}{100}$. Supposons que nous voulions calculer la limite en 2. Il faut choisir un η adéquat pour que :

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

dans notre cas :

$$|x - 2| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{100}$$

et comme $f(x) = \dfrac{x}{2}$:

$$|x - 2| < \eta \Rightarrow |\frac{x}{2} - L| < \frac{1}{100}$$

donc :

$$x - \eta < 2 < x + \eta \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{100} < L < \frac{x}{2} + \frac{1}{100}$$

on multiplie par 2 la deuxième inégalité pour pouvoir «comparer» les deux inégalité :

$$x - \eta < 2 < x + \eta \Rightarrow x - \frac{1}{50} < 2 \cdot L < x + \frac{1}{50}$$

on peut donc prendre $\eta = \dfrac{1}{50}$:

$$x - \frac{1}{50} < 2 < x + \frac{1}{50} \Rightarrow x - \frac{1}{50} < 2 \cdot L < x + \frac{1}{50}$$

et en comparant les deux inégalités, on conclut que $L = 1$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{2} = 1$$

Je vous entend déjà dire : mais en fait c'est facile de calculer une limite :$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$! Eh bien non ! Ceci n'est valable que si la fonction est continue en a. Mais si la fonction n'est pas continu en a, il peut quand même y avoir une limite (dans certains cas). Par exemple : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas continue en 1 (forcément, il n'y a même pas d'image en 1) et pourtant la limite existe : $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$. On a parfaitement le droit de simplifier par $x-1$ ici car x n'est pas égal à 1 mais on fait *tendre* x vers 1.

Tout comme nous avons définit la notion de limite d'une suite, nous allons maintenant définir la notion de limite d'une fonction en un point. On peut se baser sur la notion de limite d'une suite. En effet, considérons une suite de nombres que l'on va noter $x_1, x_2, x_3, \ldots$, et imaginons que cette suite tende vers un nombre a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

L'idée est de se demander si la suite de nombres $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ converge vers une certaine limite. Supposons que cette suite tende vers L, on note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

et on dit que «$f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a». Notez que c'est juste une nouvelle notation pour écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$$

On peut assez facilement comprendre (et le montrer mathématiquement) que si la fonction est continue :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

On pourrait croire naïvement que cette dernière égalité est toujours vraie. Pour montrer que ce n'est pas le cas, considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

Et cherchons sa limite en 1. On sait déjà que cette limite ne peux pas être $f(1)$, puisque $f(1)$ n'est pas défini (division par zéro). Alors cette limite existe t-elle ? Oui, et on peut le voir de la manière suivante. En sachant que $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Peut-être pensez vous que cela est faux puisque l'on divise par $(x-1)$ qui vaut zéro si $x = 1$. Mais souvenez vous que par définition :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

Avec $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. On peut choisir par exemple la suite x_n tel que $x_0 = 0.9$, $x_1 = 0.99$, $x_2 = 0.999\ldots$ On voit bien que cette suite tend vers 1. En fait lorsque l'on calcule :

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

c'est équivalent à calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(x_n + 1)(x_n - 1)}{x_n - 1}$$

Or, quel que soit le x_n de la suite définie plus haut, $x_n \neq 1$ et donc $x_n - 1 \neq 0$. Il n'y a donc pas de division par zéro.

Nous allons maintenant voir une application pratique de cette notion.

6 Fonctions dérivées

6.1 Introduction

On va reprendre le paradoxe de la flèche en vol, et montrer que le paradoxe n'est qu'apparent.

On peut faire une première remarque : il faut distinguer ce qu'est un *instant* et ce qu'est une *durée* aussi courte soit-elle. Durant, une durée même extrêmement courte, la flèche se déplace - même si c'est une distance vraiment très petite. Ainsi, lorsque l'on observe la flèche sur une durée de plus en plus petite, on ne constate jamais que le mouvement de la flèche devient nul.

Supposons que la flèche suit une trajectoire parfaitement rectiligne, et que sa vitesse v est constante. Si on l'observe pendant un certains temps t, elle parcourt une distance d tel que $v = \frac{d}{t}$. Lorsque l'on observe la flèche sur un temps de plus en plus court, on la voit parcourir une distance de plus en plus courte, et à chaque fois que l'on calcule le rapport $\frac{d}{t}$ on trouve toujours la même chose : v. On peut donc dire que la vitesse à un moment donné est v, alors que l'on a l'habitude de calculer des vitesses *moyennes* c'est à dire que nous calculons toujours une vitesse sur une certaine durée. Ici on dira que la *vitesse instantanée* de la flèche à un certain moment (par exemple à $t = 2s$) est v.

L'exemple ici est assez simple car la vitesse est constante. Mais on peut avoir des exemples de mouvement ou la vitesse change *à chaque instant*. Nous allons voir maintenant comment traiter ce genre de cas.

6.2 Le nombre dérivé

Imaginons un corps qui se déplace de manière rectiligne et dont on peut facilement connaître la position en fonction du temps, c'est à dire que nous avons une fonction f tel que :

$$x = f(t)$$

Le mobile est donc à la position x au temps t. Observons la position du mobile après un temps Δt très court pour avoir la meilleure estimation possible de la vitesse instantanée : le mobile sera donc à la position $f(t)$ au temps t et à la position $f(t + \Delta t)$ un court instant plus tard. La vitesse sera donc la distance parcourue $\Delta d = f(t + \Delta t) - f(t)$ divisée par le temps Δt : $v = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Plus Δt sera petit et plus la mesure de la vitesse sera précise. On va donc utiliser une nouvelle fois la notion de limite :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Prenons un exemple : $f(t) = t^2$ et essayons de connaître la vitesse au temps $t = 2s$. On a (petit rappel : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$) :

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(2 + \Delta t)^2 - 2^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^2 + (\Delta t)^2 + 4\Delta t - 2^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta t)^2 + 4\Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t + 4) \\ &= 4m/s \end{aligned}$$

La vitesse du mobile après 2 secondes est donc de 4 mètres par secondes.

On dit dans ce cas que l'on calcule le *nombre dérivé* de la fonction en 2 (ce nombre est 4).

On a donc la définition suivante :

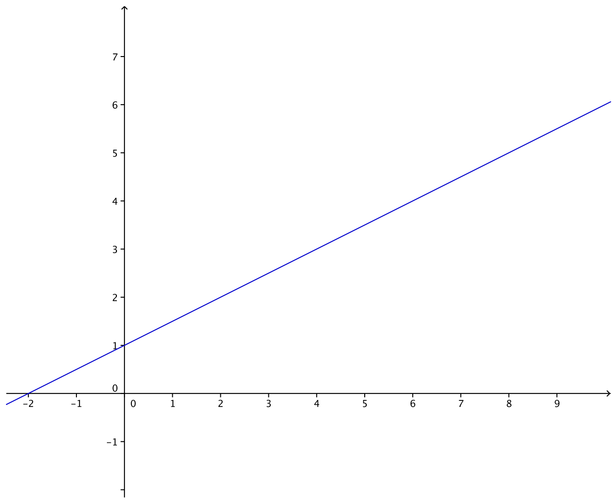
Définition 5. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, cette fonction est* dérivable *en $x_0 \in I$ si le nombre α défini par :*

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

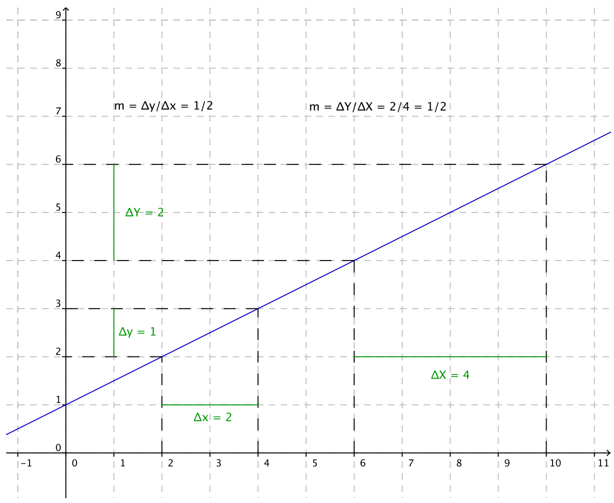
existe et appartient à $\mathbb{R}$, ce nombre est alors appelé nombre dérivé de f en x_0.

On peut illustrer cela graphiquement. Mais avant d'aller plus loin, il peut peut être nécessaire de faire un rappel sur la notion de pente d'une droite :

Rappel pour ceux qui ne sont pas familiers avec la notion de pente d'une droite : prenons par exemple, la droite ci dessous :



On voit que cette droite «monte», on dit qu'elle a une certaine «pente». Plus la droite «monte» plus la valeur de la pente est forte. On va maintenant montrer comment on calcule cette pente. Observez le schéma suivant :

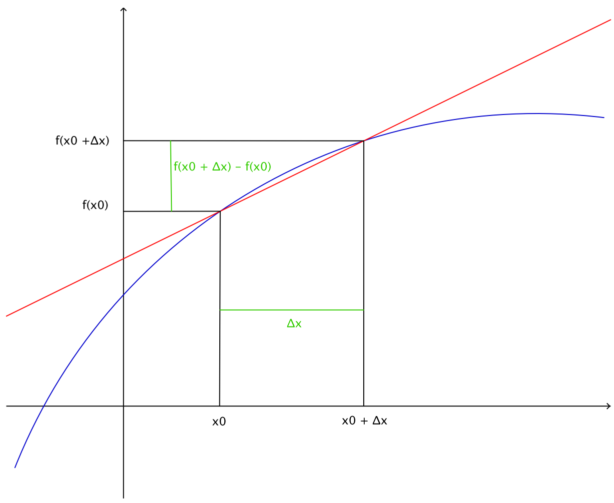


Le dessin est quadrillé pour une meilleur compréhension. Si on part d'un point quelconque du graphique, on voit que si l'on avance de deux cases vers la droite, on doit remonter ensuite d'une case pour retrouver le graphique. On dit donc que la pente de la droite est de un demi.

On montre sur le dessin comment on peut calculer la pente de la droite. On choisi deux points quelconques du graphique et on regarde la différence d'abscisse (que l'on note Δx) et la différence d'ordonnée Δy. On a donc pour calculer la pente m, la formule : $m = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. On voit aussi sur le dessin que le calcul de la pente donne le même résultat quel que soit les deux points choisis.

Revenons sur la notion de nombre dérivé. Prenons une fonction f quelconque.

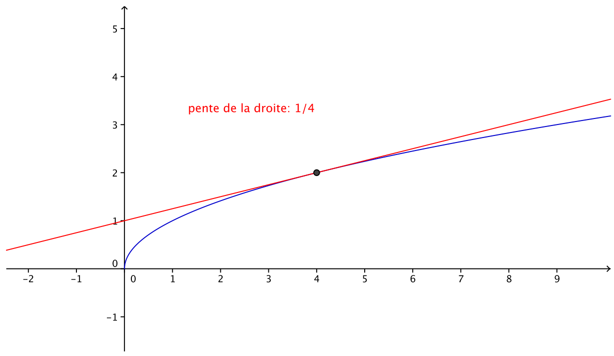
Considérons la droite passant par les points $f(x_0)$ et $f(x_0 + \Delta x)$ (voir schéma ci dessous) :



Une fonction quelconque est tracée en bleu. On prend deux points, x_0 et $x_0 + \Delta x$, et on regarde leurs images.

On peut repérer sur le graphique les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, et tracer la droite passant par ces deux points. On obtient la droite en rouge sur le dessin. On a donc que la pente de la droite est : $m = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

On sait que le nombre dérivé est : $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, c'est à dire la pente de la droite lorsque Δx tend vers zéro. C'est à dire, si vous regardez à nouveau le schéma, quand x_0 et $x_0 + \Delta x$ sont infiniment proches et donc que la droite en rouge ne touche plus qu'un seul point du graphique : on peut dit alors que la droite est *tangente* au graphique. Exemple en image :



On a tracé en bleu la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Le nombre dérivé en $x_0 = 4$ est (rappel : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4})(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4})}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4+\Delta x) - 4}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4})} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+\Delta x} + \sqrt{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Si on trace la tangente en $x = 4$, on a donc que la pente de la droite est $\frac{1}{4}$ (voir schéma).

6.3 Fonction dérivée

À partir de la notion de nombre dérivé, on peut définir la *fonction dérivée*. Supposons que nous avons une fonction f, et que nous pouvons calculer le nombre dérivée en chaque point de l'intervalle I. À chaque point x de l'intervalle I, on peut donc associer le nombre dérivé de f en x et on obtient donc la fonction dérivée (notée $f'(x)$ ou encore $\frac{df}{dx}$) défini comme suit :

Définition 6. *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que la fonction est* dérivable *sur I si $\forall x \in I$ le nombre dérivé de f en x existe, et la fonction dérivée est définie par :*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Remarque : on utilise souvent la lettre «h» au lieu de Δx pour alléger l'écriture.

7 Formules de dérivation

On a vu la formule : $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ qui permet de calculer la dérivée d'une fonction. En pratique, on ne l'utilise jamais, on utilise des formules que nous allons maintenant établir.

7.1 Dérivée d'une somme

Théorème 1. *Soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables, alors* $f+g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *est dérivable et :*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Démonstration :

Soit donc $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On doit dériver $f+g$, donc :

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

7.2 Dérivée d'un produit

Théorème 2. *Soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables, alors* $fg : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *est dérivable et :*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Démonstration :

Soit donc $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On doit dériver fg, donc :

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

On rajoute le terme $-f(x)g(x+h)$ pour faire apparaître la dérivée de f :

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} (g(x+h)f'(x) + f(x)g'(x)) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

7.3 Dérivée d'un quotient

Théorème 3. *Théorème : soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telle que la fonction g ne s'annule jamais, alors $f/g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable et :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Démonstration :

On doit d'abord montrer que $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)}{g(x)g(x+h)} - \frac{g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(g(x+h) - g(x))}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-g'(x)}{g(x)g(x+h)} \\
&= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g(x)g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

On utilise à la deuxième ligne la formule de la dérivée d'un produit.

7.4 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 4. *Soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables, alors* $g \circ f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *est dérivable et :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(g \circ f)'(x+h) - (g \circ f)'(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x) + f(x+h) - f(x)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} f'(x)
\end{aligned}$$

Posons maintenant : $\alpha = f(x+h) - f(x)$, on a : $\lim_{h\to 0} \alpha = \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{g(f(x) + \alpha) - g(f(x))}{\alpha} f'(x) \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

8 Dérivées usuelles

Pour pouvoir calculer une dérivée, on utilise en pratique les formules que nous venons de voir, plus une série de dérivées «connues» à retenir par cœur.

La fonction constante : $f(x) = k$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

La fonction identité : $f(x) = x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

La fonction $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x + h) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Remarquez qu'on a utilisé $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

La fonction $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= \frac{-1}{x^2}
\end{aligned}$$

Les fonctions du type $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$:

On va montrer que $f'(x) = nx^{n-1}$. On sait déjà que c'est vrai pour $n = 0$: $(x^0)' = k' = 0$, pour $n = 1$: $(x^1)' = x' = 1 \cdot x^0 = x$ et pour $n = 2$: $(x^2)' = 2x^1 = 2x$. Pour $x = 3$ et $x = 4$:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 = 3x^2$$
$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 = 4x^3$$

On peut continuer ainsi encore très longtemps, mais on peut remarquer que si on sait que $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour un certains n, alors on peut prouver la même formule pour $n+1$ c'est à dire $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. En effet :

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1}x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

Et on prouve ainsi implicitement la formule pour tout n, car on sait que c'est vrai pour $n = 4$ donc c'est vrai pour $n = 5$, et donc pour $n = 6$, ... C'est un *raisonnement par récurrence.*

La fonction $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} \lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos x \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

On utilise la formule $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ pour passe de la deuxième à la troisième ligne, et la formule $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ à la fin.

La fonction $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

On utilise $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

La fonction $f(x) = \tan(x)$:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

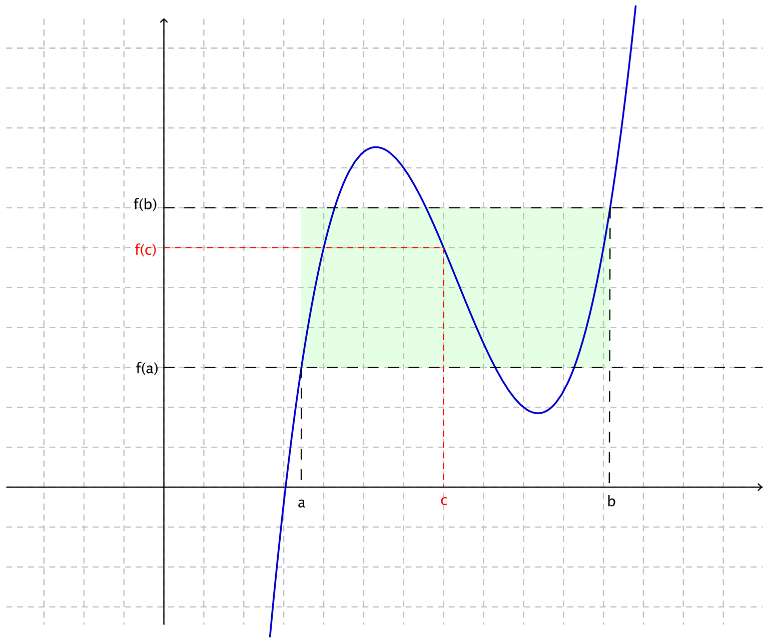
En résumé :

$k' = 0$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$x' = 1$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^2)' = 2x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	

9 Théorème des valeurs intermédiaires

9.1 Introduction

Nous allons maintenant énoncer une série de théorèmes important en analyse. Le premier de ces théorèmes est vraiment très simple à énoncer. On considère une fonction continue quelconque, sur un intervalle $[a, b]$:



On regarde les points images $f(a)$ et $f(b)$ sur l'axe y. Entre ces deux points, on en choisit un, n'importe lequel, appelons-le x. Alors, le théorème dit qu'il est possible de trouver un point c entre a et b, tel que $x = f(c)$.

On peut en donner une illustration simple. Supposons que nous nous tenions au pied d'une montagne, à une altitude de cent mètres au dessus du niveau de la mer. Le sommet de la montagne se trouve lui à mille mètres au dessus du niveau de la mer. On emprunte un chemin qui nous emmène au sommet, et disons qu'il faille douze kilomètres pour y arriver. On peut définir la fonction «altitude» (qu'on va noter simplement f) qui donne l'altitude en fonction de la distance parcourue. En prenant la convention d'être à zéro au pied de la montagne :

$$f(0) = 0.1$$

et :

$$f(12) = 1$$

en exprimant tout en kilomètres. Le théorème nous dit donc, que pour n'importe quel altitude z comprise entre 0.1 et 1 km au dessus du niveau de la mer, correspond au moins un point sur le chemin situé à cette altitude. C'est tout à fait logique : on passe par toutes les altitudes intermédiaires (d'où le nom du théorème).

9.2 Énoncé

Théorème 5. *Soit une fonction continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, alors :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, (u \in [f(a), f(b)] \vee u \in [f(b), f(a)]) \Rightarrow (\exists c \in [a,b], f(c) = u)$$

Notez que l'on s'assure que de traiter les cas $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(a) \geqslant f(b)$ grâce à l'utilisation du «ou» logique (symbole «$\vee$»).

9.3 Démonstration

Nous allons tout d'abord poser que $f(a) \leqslant f(b)$, le cas contraire se démontrant de manière similaire. On considère le sous-ensemble E de $[a,b]$, des éléments x tel que $f(x) \leqslant u$ (u étant compris entre $f(a)$ et $f(b)$). On pose encore $c = \sup E$. On peut montrer qu'il est possible de trouver une suite d'éléments de E tendant vers c (cette démonstration n'est pas encore sur Freesciences). Pour chaque élément x_i de cette suite, on a $f(x_i) \leqslant u$ (par définition de E) ; en passant à la limite, on a donc $f(c) \leqslant u$.

On peut maintenant prouver $f(c) \geqslant u$, on aura donc $f(c) = u$ et le théorème sera démontré. Si $c = b$, c'est vrai car u a été choisi tel $f(b) \geqslant u$. Si $c \neq b$, on considère l'intervalle semi-ouvert $]c, b]$. Ses éléments vérifient $f(x) > u$, puisqu'ils n'appartiennent pas à E, étant strictement supérieurs à sa borne supérieure. Comme précédemment, c étant l'infimum de l'intervalle, il est limite d'une suite d'éléments de cet intervalle, par passage à la limite, on a $f(c) \geqslant u$.

9.4 Analyse et conséquences

Un cas particuliers de ce théorème est fort utile en analyse. Il suffit de considérer le cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou le cas contraire, l'important est le changement de signe). Dans ce cas, zéro est entre les images de a et de b, et le théorème nous dit qu'il existe un certain x entre a et b tel que $f(x) = 0$. Ceci est donc utile lorsque l'on veut prouver qu'il existe une racine dans un certain intervalle.

Arrêtons nous un instant sur ce point. Tout ce que nous avons dit c'est «une fonction continue qui change de signe sur un certain intervalle, s'annule au moins une fois quelque part sur cette intervalle». Avec un simple dessin et quelque explications, il est sans doute possible de faire comprendre cela à un enfant de dix ans. Ce qu'il ne comprendra sans doute pas, c'est plutôt : pour pourquoi vouloir prouver une chose pareille ?

Les mathématiques sont remplies de démonstrations «inutiles». Si vous avez lu le chapitre sur les nombres, vous avez pu très bien vous en rendre compte. Mais encore une fois, prouvez ce qui est «évident» est une *nécessité*. C'est la seule manière de s'assurer une rigueur absolue.

10 Théorème de Rolle

10.1 Introduction

Le théorème de Rolle est tout aussi facile à comprendre que le précédent. Sa facilité ne doit pas faire oublier son importance dans l'élaboration rigoureuse de l'analyse ; il est effet nécessaire en mathématique de démontrer toute assertion, aussi évident soit-elle intuitivement.

Nous allons ici donner l'intuition sous-jacente à ce théorème, sans aller dans les détails mathématiques. Considérons une fonction sur un certain intervalle $[a, b]$, cette fonction étant telle que :

$$f(a) = f(b)$$

Le théorème de Rolle nous dit alors que si la fonction est dérivable, il existe un certain point c entre a et b tel que :

$$f'(c) = 0$$

Une première manière de comprendre ce résultat est de visualiser un dessin et de voir que la «pente instantanée» de la fonction s'annule en un point. Je vous propose ici une méthode plus «cinématique».

Nous avons vu que la vitesse en fonction du temps est la dérivée (par rapport au temps) de la fonction de la position en fonction du temps. Imaginons une fourmi se déplaçant sur un axe gradué, et un expérimentateur mesure sa position sur l'axe en fonction du temps. Son mouvement se fait sur une dimension, mais peut-être assez compliqué : elle change de vitesse, peut faire des demi-tours,... Il est possible à partir des mesures de construire une fonction $x(t)$ de la position en fonction du temps. Imaginons qu'elle repasse deux fois au même endroit, par exemple au temps $t = 10s$ et $t = 20s$, c'est à dire mathématiquement :

$$x(10) = x(20)$$

Le théorème dit alors, qu'à un certain temps t^*, entre dix et vingt secondes :

$$x'(t^*) = 0$$

Mais la dérivée de $x(t)$ donnant la vitesse, on sait donc qu'au temps t^*, la vitesse de la fourmi est nulle. Cela est tout à fait normal : étant repassée deux fois au même endroit, elle a dû au moins une fois faire demi-tour, à l'instant précis où elle fait demi-tour, sa vitesse est nulle.

10.2 Énoncé

Théorème 6. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$f'(c) = 0$$

10.3 Démonstration

Si la fonction est constante sur $[a, b]$, le théorème est bien évidemment vrai. Dans le cas contraire, la fonction passe par un certain maximum global que l'on note $f(c)$. Le maximum étant atteint au point c on a, quel que soit $h > 0$ et tel que $c + h \in [a, b]$:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Si fait tendre h vers zéro par valeurs positives, on peut en déduire que $f'(c) \leq 0$.

Toutefois, on peut très bien refaire le même raisonnement avec des valeurs négative de h, cette fois, on aurait :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Et donc cette fois, $f'(c) \geq 0$. On en conclut donc que $f'(c) = 0$.

11 Théorème des accroissements finis

11.1 Introduction

Ce théorème ressemble un peu au précédent. On considère une fonction sur un certain intervalle $[a, b]$ (dérivable et continue). Ce théorème dit qu'il existe un certain point c entre a et b tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le théorème précédent est un cas particuliers de celui-ci : si $f(b) = f(a)$, alors $f'(c) = 0$. Pour comprendre ce qui se passe, il faut noter que la quantité :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente la «pente moyenne» de la fonction entre a et b. Reprenons un exemple cinématique. On part en voiture d'un point a pour arriver au point b, la vitesse de la voiture est susceptible de changer régulièrement pendant le voyage. En supposant que la voiture aille en ligne droite, la distance entre les points a et b est $x(t_b) - x(t_a)$; t_b et t_a étant les temps de passages au points a et b respectivement. Pour calculer la vitesse moyenne, on divise la distance parcourue par le temps $t_b - t_a$:

$$v_m = \frac{x(t_b) - x(t_a)}{t_b - t_a}$$

En appliquant le théorème, on sait qu'il existe un certain temps t^* ou la vitesse instantanée de la voiture sera égale à sa vitesse moyenne. C'est logique : si on fait un parcours à 60 kilomètres par heure de moyenne, à un instant donné au moins on aura été à cette vitesse.

11.2 Énoncé

Théorème 7. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, une fonction continue, dérivable sur* $]a,b[$*. Il existe* $c \in [a,b]$ *tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

11.3 Démonstration

On pose $g(x) = f(x) - \alpha x$, α étant une certaine constante réelle. On fixe cette constante en imposant que $g(a) = g(b)$, c'est à dire qu'on doit avoir :

$$f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b$$

Il ensuite facile d'isoler r, on obtient :

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme g est par construction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et que de plus $g(a) = g(b)$, il satisfait aux conditions du théorème de Rolle. Il existe donc un certain $c \in [a,b]$ tel que $g'(c) = 0$. Partant de la définition de g et en dérivant, $f'(c)$ s'écrit :

$$f'(c) = g'(c) + \alpha = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

12 Théorème du sandwich

12.1 Énoncé

Le théorème du sandwich s'énonce de la manière suivante. Supposons que sur un certain intervalle, on ait trois fonctions f, g et h, tels que pour tout point x appartenant à cet intervalle, on ait :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

et que l'on ait pour un certain point a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

alors le théorème nous dit que :

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Cela peut se comprendre de la manière suivante. La fonction $g(x)$ est prise «en sandwich» entre f et h, si ces fonctions tendent vers une certaine limite en un point, elle se rejoignent et $g(x)$ «prise en étau» atteint la même limite.

12.2 Introduction

Théorème 8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a \in I$ un nombre réel. Soient encore trois fonctions f, g et h définies sur I, sauf éventuellement en a. Si :*

— $\forall x \in I \wedge x \neq a, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

— $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

Alors :

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

12.3 Démonstration

On commence par prouver un cas particuliers du théorème. On choisit $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et $L = 0$. La deuxième hypothèse nous dit que :

$$\lim_{x \to a} h(x) = 0$$

Ce qui peux s'écrire encore, par définition de la limite de fonction :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |h(x)| < \epsilon$$

En prenant $f(x) = 0$ dans la première hypothèse :

$$\forall x \in I \wedge x \neq a, 0 \leq g(x) \leq h(x)$$

Donc, puisque tout est positif :

$$|g(x)| \leq |h(x)|$$

ce qui nous permet d'écrire l'expression de la limite :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x)| \leq |h(x)| < \epsilon$$

En conclusion :

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0 = L$$

Ce qui prouve donc le cas particuliers. Pour prouver le cas général, partons de :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

On soustrait $f(x)$:

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x)$$

Si on fait tendre x vers a, $f(x)$ et $h(x)$ tendent vers L et $h(x) - f(x)$ tend vers 0. On se retrouve dans le cas particuliers déjà prouvé, qui nous dit que $g(x) - f(x) \to 0$. On a donc :

$$\lim_{x \to a} g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x) = 0 + L = L$$

13 Calcul intégral

13.1 Comment calculer la surface d'un disque ?

La question semble innocente. Simple. La plupart d'entre vous ont sans doute en lisant le titre, repensé à la fameuse formule connue depuis longtemps : $S = \pi r^2$. Une formule toute simple. Se pose juste une question un peu délicate : cette formule, d'où vient-elle ?

On peut par un découpage approprié de la sphère (on la découpe comme une tarte) donner peut être pas une démonstration rigoureuse mais au moins une intuition pour la justifier. Nous allons utiliser une autre technique, plus formelle, qui aura l'avantage de fonctionner pour calculer la surface de beaucoup d'autre formes géométriques.

Inspirons nous des techniques habituelles de la géométrie. Très souvent lorsque l'on est confronté à un polygone un peu «spécial», on a le réflexe de le découper en triangles. L'idée est donc le décomposer une forme compliquée en plusieurs formes simples dont la surface est facile à calculer. Dans le cas d'un disque cependant, il est impossible de faire un découpage exact en polygones. Mais c'est pas très grave.

En effet, nous allons utiliser une forme très simple : le rectangle. On peut se rendre facilement compte qu'une tel découpage ne sera qu'une approximation, du moins dans un premier temps. Pour faire ce découpage, nous allons nous mettre dans un système d'axe et nous allons de plus utiliser la notion de fonction. En effet, c'est bien beau de dire : «on va découper en rectangle» mais après qu'est ce qu'on fait comme calcul ? Il faut connaître la largeur et la longueur de chaque rectangle.

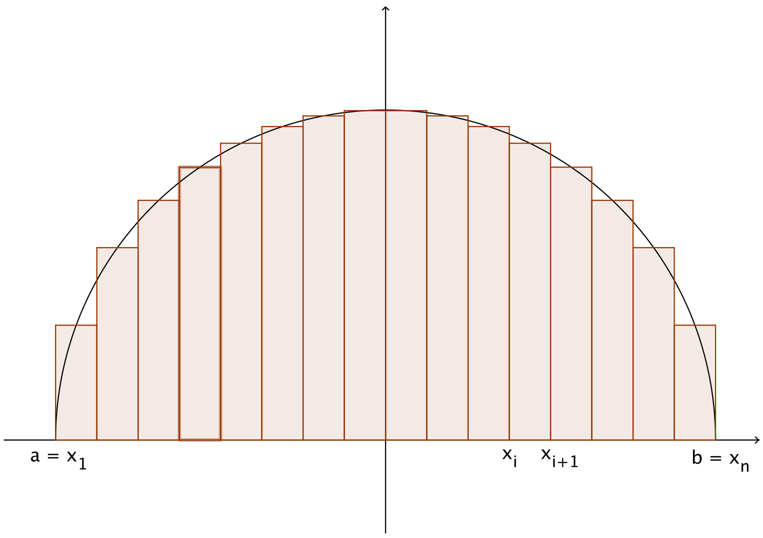
Considérons un disque de rayon r centré à l'origine. L'ensemble des points du bord du disque est l'ensemble des points qui sont à une distance r de l'origine, c'est à dire l'ensemble des points (x, y) tels que :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Cependant, pour utiliser la notion de fonction, il faut qu'à chaque abscisse x corresponde au plus un point sur le disque. On va donc se restreindre à un demi disque, d'équation :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Et on découpe comme ceci :



Notons $a = -r$ et $b = r$. On découpe donc l'intervalle $[a, b]$ pour construire la base des rectangles. On a donc des nombres $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ qui forment ce découpage avec $a = x_1$ et $b = x_n$.

À chaque rectangle correspond deux nombres, x_i et x_{i+1}, tel que le segment qui joint ces points sur l'axe x soit la base du rectangle. Les rectangles sont construits de manière à ce que leur hauteur soit l'image du nombre situé entre x_i et x_{i+1}, soit :

$$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

La surface de chaque rectangle est sa base multiplié par sa hauteur :

$$S_i = (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Comme on fait un découpage régulier, les bases de tout les rectangles sont égales, et on va noter $h = (x_{i+1} - x_i)$. De même, on sait que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, donc :

$$S_i = h\sqrt{r^2 - \frac{(x_i + x_{i+1})^2}{4}}$$

mais on sait que $x_{i+1} = x_i + h$, donc :

$$S_i = h\sqrt{r^2 - \frac{(2x_i + h)^2}{4}}$$

Et la surface totale est donc la somme de tout les S_i multipliée par 2 car on n'a pour l'instant qu'un demi-disque :

$$S_{tot} = 2\sum_{i=1}^{n} h\sqrt{r^2 - \frac{(2x_i + h)^2}{4}}$$

Plus les rectangles sont fins et nombreux, plus le calcul de la surface est précis, à la limite donc, pour des rectangles infiniment fins, on a la somme exacte :

$$S_{tot} = 2 \lim_{n \to +\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} h \sqrt{r^2 - \frac{(2x_i + h)^2}{4}} \right]$$

Il reste à prouver que :

$$S_{tot} = \pi r^2$$

Ce qui semble loin d'être simple... on n'a pas encore calculé la limite d'une expression aussi compliquée ! ! C'est pourtant possible et nous allons voir comment.

13.2 Somme de Riemann

13.2.1 Introduction

On va faire le même raisonnement que précédemment, mais de manière plus générale : on s'intéresse à la surface en dessous d'une courbe quelconque.

Considérons une fonction quelconque $f(x)$ positive sur l'intervalle $[a, b]$. On découpe la surface en dessous de la courbe en un grand nombre de petits rectangles de hauteur $f(y_i)$ et ayant une base $x_{i+1} - x_i$ tel que $x_i \leq y_i \leq x_{i+1}$. Si on note $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, la surface est donc (en approximation) :

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \Delta x_i$$

Il s'agit d'une *somme de Riemann*. On fais maintenant tendre le nombre de rectangle vers l'infini, et on note la somme comme ceci :

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

C'est une *intégrale de Riemann*. Notre but principal va être, et pour longtemps, de savoir comment calculer cette expression ! remarquez que le symbole « $\int$ » est une sorte de S allongé qui rappelle que l'on calcule bien une somme.

On peut déjà énoncer une propriété : l'additivité de l'intégrale, on a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Ainsi que la linéarité de l'intégrale :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lambda f(x) dx$$

Tout simplement parce que les surfaces s'additionnent. De plus on pose que :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Enfin, une dernière propriété assez évidente est la monotonie de l'intégrale :

$$(\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

13.2.2 Exemple de calcul d'une intégrale

Ce que nous savons maintenant n'est pas suffisant pour calculer la surface d'un disque. Mais on peut trouver un cas plus simple. Laissons de coté le cas où la fonction est une droite : le calcul est simple, mais tellement simple que le recours au calcul de l'intégrale de Riemann ne se justifie pas. Nous allons plutôt calculer la surface en dessous de la courbe $y = x^2$ entre 0 et 1.

On découpe donc l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même longueur (la longueur sera donc $\frac{1}{n}$). On peut choisir les x_i tels que $x_i = \frac{i}{n}$, avec i variant de 1 à n (et $x_n = 1$). La surface de chaque rectangle sera donc $\frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$:

$$S = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

en mettant $\frac{1}{n^3}$ en évidence :

$$S = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + ... + i^2 + ... + n^2\right)$$

Or on peut prouver que :

$$1 + 2^2 + ... + i^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc :

$$S = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{n^3}\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}$$

n

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Malheureusement, ce calcul est souvent très compliqué. Mais rendez vous compte déjà du résultat : la surface que nous avons calculé n'est pas une surface simple, la somme de Riemann montre déjà son intérêt.

14 Théorème des accroissements finis (forme intégrale)

14.1 Introduction

Le théorème qui nous intéresse ici est un peu complexe à énoncer de manière intuitive. C'est pour cela que nous allons juste en donner un cas particuliers, et expliquer son intérêt.

Il s'énonce de la manière suivante : si on considère une fonction sur un certain intervalle $[a, b]$, alors l'aire sous la courbe de cette fonction (que l'on peut calculer par une intégrale) est égale à l'aire d'un rectangle dont la base est l'intervalle $[a, b]$ et la hauteur une certaine «hauteur moyenne» de la courbe.

Ce théorème (pas le cas particuliers) est utile pour définir le centre de masse de la surface sous la courbe.

14.2 Énoncé

Théorème 9. *Soit deux fonctions f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b], g(x) \leq 0$. Il existe alors un nombre $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

14.3 Démonstration

Tout d'abord, il faut noter que nous allons utiliser le théorème des bornes, qui dit qu'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, possède un minimum et un maximum. Aussi simple et logique soit cette énoncé, sa démonstration l'est moins, et ne figure pas encore sur Freesciences.

Notons donc, m et M le minimum et maximum de f. On a donc, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, et puisque, $g(x) \leq 0$:

$$\forall x \in [a, b], m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$$

Par monotonie et linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in [a, b], m \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Il existe donc un nombre $d \in [a, b]$ tel que :

$$d \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

On applique donc le théorème des valeurs intermédiaires, pour trouver $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$:

$$f(c) \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ce qui achève la démonstration.

14.4 Cas particuliers

En prenant $g(x) = 1$, $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$, par simple application de la formule de l'aire d'un rectangle. On a donc :

Théorème 10. *Soit une fonction f une fonction continue définie sur $[a, b]$. Il existe alors un nombre $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

15 Théorèmes fondamentaux de l'analyse

15.1 Introduction

Nous voici arrivés aux deux théorèmes fondamentaux de l'analyse, qui vont enfin nous permettre de répondre à l'une des motivations de départ, à savoir comment calculer une surface compliquée.

Ces théorèmes font le lien entre primitive et intégrale. Nous avons vu ce qu'est une intégrale mais qu'est ce qu'une primitive ? C'est simple. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f si la dérivée de F est f. Le calcul intégrale se réduit donc à une calcul de primitive, en effet, le deuxième théorème fondamental de l'analyse nous dit que :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

On voit que si l'on connaît F le calcul est incroyablement simple !

Essayons d'en avoir une intuition «physique». Supposons un point se déplaçant sur une ligne droite, sa vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps :

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

Les notations $x'(t)$ et $\frac{dx}{dt}$ sont équivalentes. La deuxième, dite notation de Leibniz, peut se comprendre de manière intuitive. En effet, à partir de la vitesse moyenne :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

on obtient la vitesse instantané en passant à la limite (on obtient donc la dérivée de $x(t)$), pour montrer cela on remplacer Δ par d :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Et mathématiquement, on a tout à fait le droit de réécrire notre équation comme ceci :

$$v(t) \cdot dt = dx$$

N'oublions pas que dx n'est rien d'autre que Δx lorsque l'on prend la limite. dx est donc une «distance infinitésimale». Pour connaître la distance totale parcourue par le mobile, on additionne donc une infinité de «distance infinitésimale». C'est à dire, par l'équation précédente, sommer des termes infinitésimaux comme $v(t) \cdot dt$. Pour le noter, on reprend le concept de limite :

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t) \Delta t_i$$

On retombe sur la définition de l'intégrale de Riemann ! On note alors :

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

On voit sur cette dernière équation qu'intégrer revient à «retomber» sur une primitive. On va maintenant énoncer cela de façon rigoureuse.

15.2 Premier théorème fondamental de l'analyse

15.2.1 Énoncé

Théorème 11. *Considérons une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $]a, b[$ et est telle que :*

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout x appartenant à $]a, b[$.

15.2.2 Démonstration

Prenons deux points dans $[a, b]$, x et $x + \Delta x$. On peut écrire :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

On a vu l'additivité de l'intégrale, que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

On peux donc écrire :

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

L'équation de départ peux donc se réécrire :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

On utilise maintenant la forme intégrale du théorème des accroissements finis, dans le cas particuliers vu précédemment :

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$$

donc :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(c)\Delta x$$

ou encore :

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

En prenant la limite quand Δx tend vers zéro, le membre de droite devient la dérivée de $F(x)$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

Pour calculer cette limite, on utilise le théorème du sandwich. On sait que $x \leq c \leq x + \Delta x$ et que $\lim_{\Delta x \to 0} x = x$ et $\lim_{\Delta x \to 0} x + \Delta x = x$, le théorème nous dit donc que :

$$\lim_{\Delta x \to 0} c(x) = x$$

Où $c(x)$ est une fonction qui donne une valeur possible de c en fonction de x. Faire tendre Δx vers zéro revient donc à faire tendre c vers x, c'est à dire :

$$F'(x) = \lim_{c \to x} f(c)$$

f étant continue en c, on peut conclure :

$$F'(x) = f(x)$$

15.3 Deuxième théorème fondamental de l'analyse

15.3.1 Énoncé

Théorème 12. *Soit une fonction f définie sur $[a, b]$ ayant une primitive F sur $[a, b]$, c'est à dire que pour tout $x \in [a, b]$:*

$$f(x) = F'(x)$$

Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

15.3.2 Démonstration

Rappelons tout d'abord la définition de l'intégrale de Riemann :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i$$

Où on définit Δx comme la largeur du plus grand rectangle :

$$\Delta x = \max_{i \in \{1,...,n\}} (\Delta x_i) = \max_{i \in \{1,...,n\}} (x_{i+1} - x_i)$$

Rappelons encore que l'on découpe l'intervalle $[a, b]$ de telle sorte que :

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} = b$$

donc :

$$F(b) - F(a) = F(x_{n+1}) - F(x_1)$$

Rajoutant des termes s'annulant deux à deux (des termes comme $(-F(x_i) + F(x_i))$) :

$$F(b) - F(a) = F(x_{n+1}) + (-F(x_n) + F(x_n)) + ... + (-F(x_i) + F(x_i)) + ... + (-F(x_2) + F(x_2)) - F(x_1)$$

On peux alors regrouper différemment les termes :

$F(b)-F(a) = (F(x_{n+1})-F(x_n))+(F(x_n)-F(x_{n-1}))+...+(F(x_{i+1})-F(x_i))+...+(F(x_2)-F(x_1))$

C'est à dire :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe un certain $c \in [a, b]$ tel que $F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$, c'est à dire que :

$$F'(c)(b - a) = F(b) - F(a)$$

On peut aussi l'appliquer sur chaque intervalle $[x_{i+1}, x_i]$:

$$F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

L'équation vue un peu plus haut devient en remplaçant :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Mais par hypothèse, $F'(c_i) = f(c_i)$, et utilisant la définition de Δx_i :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

On reconnaît bien là une somme de Riemann, il suffit donc de prendre la limite pour conclure la démonstration :

$$\lim_{\Delta x \to 0} F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$